
UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01178728 0

SCIENTIA

OCT. 1920.

PHYS.-MATHÉMATIQUE

n° 38.

APERÇUS THÉORIQUES

SUR

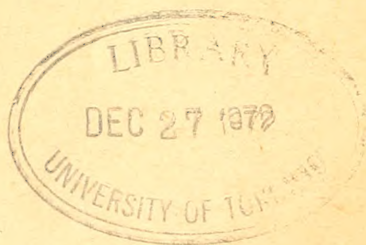
LA RÉSISTANCE DES FLUIDES

PAR

M. HENRI VILLAT,

Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg.




LIBRARY
DEC 27 1979
UNIVERSITY OF TORONTO

PRÉFACE.

Le présent petit Livre a pour but de donner, en un abrégé aussi succinct que possible, les résultats théoriques que l'on peut obtenir en appliquant les équations de l'Hydrodynamique des fluides parfaits, à l'étude du mouvement d'un solide dans un fluide. Il ne s'agit donc pas ici d'un livre technique, avec description d'expériences.

Pendant ces quinze dernières années, l'Hydrodynamique a réalisé des progrès extrêmement considérables dans des directions variées. On pourra trouver un tableau d'ensemble des travaux correspondants dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* (*Sur quelques progrès récents des théories hydrodynamiques*, 1917). Parmi les très nombreux résultats obtenus, nous avons groupé spécialement ici ceux qui se rattachaient plus particulièrement aux problèmes de résistance.

Notons que la pratique confirme à peu près les résultats numériques indiqués par la théorie. Cette dernière fournit cependant pour la résistance des valeurs un peu trop faibles.

Nous espérons que ce Livre pourra présentement rendre quelque service. Peut-être vient-il en son heure, et sans doute n'est-il pas inutile de préciser ce qu'on peut attendre de l'application des équations de l'Hydrodynamique, puisqu'on voit encore, en des publications fort récentes, des ingénieurs et des praticiens dont nous ne méconnaissons ni le mérite ni les excellentes intentions, proposer, en se fondant sur les mêmes équations, des explications ou des théories des phénomènes de résistance, et retomber dans des errements anciens dont il vaudrait cependant mieux ne plus entendre parler.

H. V.

APERÇUS THÉORIQUES

SUR

LA RÉSISTANCE DES FLUIDES

CHAPITRE I.

RAPPEL DES THÉORÈMES ET PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Dans le présent volume je me propose d'exposer brièvement, parmi les récents travaux concernant l'hydrodynamique moderne, ceux qui se rattachent plus particulièrement à la résistance qu'un fluide parfait oppose au mouvement d'un solide.

Je supposerai, bien entendu, que le lecteur connaît les premiers principes élémentaires de la théorie du mouvement des fluides, et je rappelle sans démonstration que dans un fluide isotrope, en appelant u, v, w les trois composantes de la vitesse de la molécule fluide placée à l'instant t au point x, y, z, en désignant, en outre, par p la pression en ce point et par ρ la densité, on a les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = Y - \frac{\partial v}{\partial t} - u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial v}{\partial y} - w\frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = Z - \frac{\partial w}{\partial t} - u\frac{\partial w}{\partial x} - v\frac{\partial w}{\partial y} - w\frac{\partial w}{\partial z};$$

avec l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0;$$

X, Y, Z représentent la force extérieure qui agit sur l'unité de masse au point x, y, z.

L'équation complémentaire, dans un liquide parfait, à température constante, se réduit à

$$\rho = \text{const}.$$

Presque toujours dans ce qui suivra, nous nous placerons dans ce cas, pour lequel les équations ci-dessus se réduisent aux sui-

vantes :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = X - \frac{\partial u}{\partial t} - u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} - w\frac{\partial u}{\partial z},$$

. . . .

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

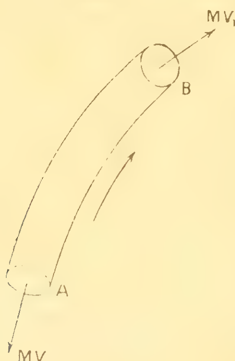
Si, en outre, le mouvement est permanent, c'est-à-dire si sa configuration est indépendante du temps, ces équations deviennent :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{array} \right.$$

Au sujet des mouvements *permanents*, rappelons deux théorèmes classiques :

THÉORÈME D'EULER. — *Considérons dans le fluide un tube ou filet fluide limité par un ensemble de lignes de courant formant une sorte de canal, et par deux sections normales A et B. S'il n'y a pas de forces extérieures, l'ensemble*

Fig. 1.



des pressions qui s'exercent sur le tube ainsi limité est équivalent à deux forces MV, MV_1 *normales respectivement aux deux cloisons* A *et* B; M *désignant la quantité de fluide qui s'écoule par le tube pendant l'unité de temps.*

La démonstration est classique (*cf.*, par exemple, N. JOUKOWSKI, *Aérodynamique*, p. 12, Gauthier-Villars, 1916).

THÉORÈME DE BERNOULLI. — *Supposons que les forces exté-*

rieures X, Y, Z dérivent d'une fonction de forces U et que l'on ait

$$\rho = f(p).$$

Posons

$$Q = U - \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho};$$

on aura

$$\frac{1}{2}V^2 - Q = \text{const.},$$

tout le long du filet fluide; la constante change de valeur, en général, d'un filet à un autre.

Introduisons maintenant le vecteur tourbillon: posons

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x},$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y};$$

les équations (1) s'écrivent de suite sous la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(Q - \dfrac{V^2}{2}\right) = 2(\eta w - \zeta v), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

Admettons que les tourbillons soient partout nuls. Il existe alors un potentiel φ pour les vitesses, tel que l'on ait

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Les équations précédentes donnent dans tout le fluide

$$Q - \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

C'est le théorème de Bernoulli, mais avec une même constante pour tous les filets. Cette constante est connue dès que l'on connait V et Q en *un* point particulier quelconque du courant.

Dans le cas du fluide incompressible et irrotationnel, il résulte de ce qui précède que p et φ sont déterminés par les deux équations

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

et

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right] - U + \int \frac{dp}{\rho} = \text{const.}$$

Il faudra, en outre, tenir compte des conditions aux limites; par exemple, si le fluide reste en contact avec une paroi solide fixe, la vitesse en chaque point de la paroi doit être tangente à celle-ci, ce qui donne, en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la tangente au solide,

$$\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{d\varphi}{dn} = 0.$$

Dans le cas d'un mouvement permanent à deux dimensions, parallèle à un plan fixe xOy, l'équation de continuité, qui s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

exprime que $- v\,dx - u\,dy$ est une différentielle exacte; on peut donc poser

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

ψ est la fonction de courant ou fonction de Stokes; les lignes de courant ont, en effet, pour équation

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

c'est-à-dire

$$d\psi = 0$$

ou

$$\psi = \text{const.}$$

Si, en outre, il n'y a pas de tourbillons, on a, comme plus haut,

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Alors on a pour φ ou ψ la même équation indéfinie

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \qquad \Delta\psi = 0;$$

les fonctions φ et ψ sont harmoniques conjuguées; de plus, $\varphi + i\psi$ est une fonction analytique de la variable complexe $z = x + iy$.

— —

CHAPITRE II.

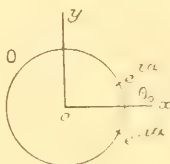
LE PROBLÈME DE DIRICHLET DANS LE CERCLE ET DANS L'ANNEAU.

Nous aurons constamment besoin, dans les Chapitres qui vont suivre, de la solution de deux problèmes dont nous donnons ici le détail.

Le premier des problèmes qui se posent est le suivant : *Déterminer une fonction analytique* $F(z)$, *régulière dans tout le cercle* $|z| \leq 1$, *et dont la partie réelle prenne sur la frontière* $(z = e^{is})$ *une succession de valeurs* $\Phi(s)$ *donnée.* Une telle fonction n'est évidemment définie qu'à une constante près (imaginaire pure).

Commençons par résoudre un cas particulier simple : supposons que les valeurs données à la frontière se réduisent à θ_0 (constant) et 0 sur les deux arcs séparés par les points $e^{\pm i\alpha}$ (*fig.* 2).

Fig. 2.



Il est aisé de vérifier que la fonction

$$\mathcal{F}_0(z) = \frac{\alpha\theta_0}{\pi} - \frac{\theta_0}{i\pi}\log\left(\frac{1 - ze^{i\alpha}}{1 - ze^{-i\alpha}}\right)$$

répond à ces conditions en choisissant pour détermination du logarithme celle qui est nulle pour $z = 0$.

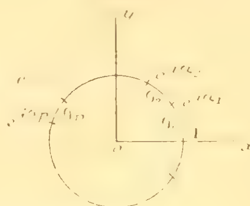
La fonction $F_0(ze^{-i\beta})$ a donc une partie réelle qui prend la valeur θ_0 quand z est situé sur l'arc qui va du point $e^{-i(\alpha-\beta)}$ au point $e^{i(\alpha-\beta)}$, et la valeur zéro sur le reste de la frontière. On conclut de là que la partie réelle de la fonction

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\alpha_1\theta_1}{2\pi} - \frac{\theta_1}{i\pi}\log\frac{1 - ze^{i\alpha_1}}{1 - ze^{-i\alpha_1}} + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\theta_2}{2\pi} - \frac{\theta_2}{i\pi}\log\frac{1 - ze^{-i\alpha_1}}{1 - ze^{-i\alpha_2}} + \dots$$

$$+ \frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{2\pi}\theta_p - \frac{\theta_p}{i\pi}\log\frac{1 - ze^{-i\alpha_{p-1}}}{1 - ze^{-i\alpha_p}} + \dots$$

sera $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p, \ldots$ sur les arcs successifs séparés par les points $1, e^{i\alpha_1}, e^{i\alpha_2}, \ldots, e^{i\alpha_p}, \ldots$.

Fig. 3.



Passons à la limite en faisant croître indéfiniment le nombre des points de subdivision de la circonférence et désignons par $\Phi(s)$ la fonction qui représente la succession des valeurs de θ le long de ces arcs successifs. La partie indépendante des logarithmes dans $\mathfrak{F}(z)$ devient évidemment

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,ds,$$

et, comme on a approximativement

$$\log\frac{1-ze^{-i\alpha_{p-1}}}{1-ze^{-i\alpha_p}} = \frac{-iz(\alpha_p-\alpha_{p-1})e^{-i\alpha_{p-1}}}{1-ze^{-i\alpha_{p-1}}},$$

la partie faisant intervenir les logarithmes devient

$$\frac{z}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{-is}\Phi(s)\,ds}{1-ze^{-is}},$$

d'où, en définitive, la fonction limite

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-is}}{1-ze^{-is}}\Phi(s)\,ds.$$

Observons ici que, si l'on veut — comme ce sera le cas dans la suite — que la fonction $\omega(z)$ vérifie la condition $\omega(0)=0$, il en résulte immédiatement pour $\Phi(s)$ la relation

$$\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,ds = 0.$$

Si, d'autre part, la fonction $\Phi(s)$ vérifie la condition

$$\Phi(2\pi - s) = \Phi(s),$$

la formule précédente se réduit à

$$\omega(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-z^2}{1-2z\cos s+z^2}\Phi(s)\,ds.$$

Les formules précédentes ne sauraient être appliquées sans précautions jusque sur la circonférence $|z| = 1$, car les points de subdivision des intervalles primitifs sont des points singuliers pour la fonction $\mathcal{F}(z)$, et à la limite, les points de la circonférence sont en apparence singuliers. On peut éviter cette difficulté par l'artifice suivant : prenons d'abord un point e^{is} qui ne soit pas singulier pour $\mathcal{F}(z)$, on trouve de suite que le coefficient de i dans $\mathcal{F}(z)$ devient en ce point

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{\pi}\left(\theta_1 \log\left|\frac{\sin\frac{s-\alpha_1}{2}}{\sin\frac{s}{2}}\right| + \theta_2 \log\left|\frac{\sin\frac{s-\alpha_2}{2}}{\sin\frac{s-\alpha_1}{2}}\right| + \dots + \theta_n \log\left|\frac{\sin\frac{s}{2}}{\sin\frac{s-\alpha_{n-1}}{2}}\right|\right),$$

ce qu'on peut écrire

$$\mathcal{T} = -\frac{1}{\pi}\sum[\theta_p - \Phi(s)]\log\left|\frac{\sin\frac{s-\alpha_p}{2}}{\sin\frac{s-\alpha_{p-1}}{2}}\right|,$$

et à la limite,

$$(3) \qquad T(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi(\alpha) - \Phi(s)]\frac{d\alpha}{\operatorname{tang}\frac{s-\alpha}{2}}.$$

Si $\Phi(2\pi - s) = \Phi(s)$, cette formule se réduit à

$$T(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}[\Phi(\alpha) - \Phi(s)]\left(\cot\frac{s-\alpha}{2} + \cot\frac{s+\alpha}{2}\right)d\alpha$$

$$= \frac{\sin s}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Phi(\alpha) - \Phi(s)}{\cos\alpha - \cos s}\,d\alpha.$$

Ce calcul suggère de transformer $\omega(z)$ en l'écrivant

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi(\alpha) - \Phi(s)]\frac{1 + ze^{-i\alpha}}{1 - ze^{-i\alpha}}\,d\alpha$$

$$+ \frac{\Phi(s)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1 + ze^{-i\alpha}}{1 - ze^{-i\alpha}}\,d\alpha,$$

c'est-à-dire, après une intégration élémentaire, en supposant $|z| < 1$,

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi(\alpha) - \Phi(s)]\frac{1 + ze^{-i\alpha}}{1 - ze^{-i\alpha}}\,d\alpha + \Phi(s).$$

Sous cette forme, la fonction $\omega(z)$ est, *dans* le cercle, identique à la valeur primitive, mais cette nouvelle évaluation reste valable jusqu'au point e^{is} de la frontière : la partie réelle devient bien égale à $\Phi(s)$, et le coefficient de i coïncide avec l'expression (3) écrite plus haut.

L'exactitude des formules précédentes est évidemment rendue vraisemblable par le raisonnement même qui y a conduit : une vérification simple et directe peut en être donnée (*cf.* notre Thèse, ou *Bulletin de la Société mathématique*, 1911) ; on démontre très aisément qu'au voisinage d'un point e^{is} de la frontière où $\Phi(s)$ est continue, la fonction $\omega(z)$ est elle-même continue, et que sa partie réelle tend vers $\Phi(s)$ quand le point z s'approche du point en question.

Au reste, si, dans la fonction

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,\frac{1+ze^{-is}}{1-ze^{-is}}\,ds,$$

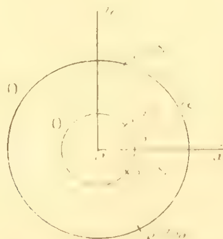
nous faisons $z = re^{i\theta}$, et si nous calculons la partie réelle, nous la trouvons égale à

$$\Theta(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-s)+r^2}\,ds.$$

Nous reconnaissons là l'intégrale de Poisson, et la façon dont elle se comporte au voisinage de la frontière est classique et bien connue (*cf.* Picard, *Analyse*, t. I, p. 248 ; t. II, p. 16. — Fatou, *Thèse*, *Acta mathematica*, 1906).

Cas de l'anneau. — Considérons maintenant un anneau circulaire, de rayons extrêmes 1 et q (<1). Il s'agit de trouver une fonction analytique de z, régulière dans la couronne et dont la partie réelle prenne sur les deux frontières des successions de valeurs données. La fonction cherchée, si elle existe, n'est évidemment définie qu'à une constante près, imaginaire pure. Voici sa détermination, telle qu'elle résulte de notre Mémoire des *Rendiconti de Palerme* (1912).

Fig. 4.



Résolvons d'abord un problème particulier en supposant que les valeurs données se réduisent à α, 0, β, 0, sur les arcs respectifs qu'indique le dessin ci-dessus (*fig.* 4). Supposons, en outre,

qu'on ait

$$\alpha s_0 = \beta s_1. \tag{4}$$

Cherchons s'il existe une série de Laurent, à coefficients réels,

$$\Omega_0(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots + b_1 \frac{1}{z} + \ldots + b_n \frac{1}{z^n} + \ldots,$$

répondant à ces conditions : la partie réelle, pour $z = e^{is}$, est

$$a_0 + (a_1 + b_1)\cos s + \ldots + (a_n + b_n)\cos ns + \ldots.$$

Ceci doit être égal à α ou 0; d'où les relations

$$a_0 = \frac{\alpha s_0}{\pi},$$

$$a_n + b_n = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\sin n s_0}{n}.$$

Pour $z = q.e^{is}$, un raisonnement analogue donnera

$$a_0 = \frac{\beta s_1}{\pi},$$

$$a_n q^n + b_n \frac{1}{q^n} = \frac{2\beta}{\pi} \frac{\sin n s_1}{n};$$

d'où nous tirons

$$\Omega_0(z) = \frac{\alpha s_0 + \beta s_1}{2\pi}$$
$$+ \frac{2\alpha}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n(1 - q^{2n})} z^n - \frac{2\alpha}{\pi} \sum_1^\infty \frac{q^{2n} \sin n s_0}{n(1 - q^{2n})} \frac{1}{z^n}$$
$$- \frac{2\beta}{\pi} \sum_1^\infty \frac{q^n \sin n s_1}{n(1 - q^{2n})} z^n + \frac{2\beta}{\pi} \sum_1^\infty \frac{q^n \sin n s_1}{n(1 - q^{2n})} \frac{1}{z^n}.$$

On a évidemment

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n(1 - q^{2n})} z^n = \sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n} z^n + \ldots + \sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n} (q^{2p} z)^n + \ldots$$

et comme

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n} z^n = \frac{1}{2i} \log \frac{1 - z e^{-is_0}}{1 - z e^{is_0}},$$

il vient

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n s_0}{n(1 - q^{2n})} z^n$$
$$= \frac{1}{2i} \log \frac{(1 - z e^{-is_0})(1 - q^2 z e^{-is_0}) \ldots (1 - q^{2p} z e^{-is_0}) \ldots}{(1 - z e^{is_0})(1 - q^2 z e^{is_0}) \ldots (1 - q^{2p} z e^{is_0}) \ldots}.$$

Échangeons, dans cette formule, z en $\frac{q^2}{z}$, puis s_0 en s_1 et z en qz ou $\frac{q}{z}$, nous obtiendrons quatre formules qui conduisent immédiatement à écrire $\Omega_0(z)$ sous la forme

$$\Omega_0(z) = \frac{\alpha s_0 + \beta s_1}{2\pi} + \frac{\alpha}{i\pi} \log \frac{\prod_{p=0}^{p=\infty}(1 - q^{2p} z e^{-is_0}) \prod_0^\infty \left(1 - q^{2p+2}\frac{e^{is_0}}{z}\right)}{\prod_0^\infty (1 - q^{2p} z e^{is_0}) \prod_0^\infty \left(1 - q^{2p+2}\frac{e^{-is_0}}{z}\right)}$$

$$- \frac{\beta}{i\pi} \log \frac{\prod_0^\infty (1 - q^{2p+1} z e^{-is_1}) \prod_0^\infty \left(1 - q^{2p+1}\frac{e^{is_1}}{z}\right)}{\prod_0^\infty (1 - q^{2p+1} z e^{is_1}) \prod_0^\infty \left(1 - q^{2p+1}\frac{e^{-is_1}}{z}\right)},$$

ou encore

$$\Omega_0(z) = \frac{\alpha s_0 + \beta s_1}{\pi} - \frac{\alpha i}{\pi} \log \frac{1 - z e^{-is_0}}{1 - z e^{is_0}}$$

$$- \frac{\alpha i}{\pi} \log \frac{\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(z e^{-is_0} + \frac{1}{z e^{-is_0}}\right) + q^{4p}\right]}{\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(z e^{is_0} + \frac{1}{z e^{is_0}}\right) + q^{4p}\right]}$$

$$- \frac{\beta i}{\pi} \log \frac{\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p-1}\left(z e^{-is_1} + \frac{1}{z e^{-is_1}}\right) + q^{4p-2}\right]}{\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p-1}\left(z e^{is_1} + \frac{1}{z e^{is_1}}\right) + q^{4p-2}\right]}.$$

Introduisons maintenant les fonctions elliptiques construites avec les deux périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$, la première réelle, la seconde purement imaginaire, définies, à un facteur près, par la condition

$$q = e^{\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}.$$

Rappelons la formule connue (*cf.* par exemple, Tannery et Molk, *Fonctions elliptiques*, form. XXIX)

$$\sigma(2\omega_1 x) = \frac{2\omega_1}{\pi} \frac{\sin \pi x}{\prod_1^\infty (1 - q^{2n})^2} e^{2\eta_1\omega_1 x^2} \prod_1^\infty (1 - 2q^{2p}\cos 2\pi x + q^{4p}).$$

Si nous posons

$$v = \frac{1}{2i\pi}\log z - \frac{s_0}{2\pi},$$

il viendra

$$2\cos 2\pi v = z e^{-is_0} + \frac{1}{z e^{-is_0}},$$

ce qui nous permettra immédiatement d'écrire

$$\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(z e^{-is_0} + \frac{1}{z e^{-is_0}}\right) + q^{4p}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\omega_1}\prod_1^\infty (1 - q^{2p})^2 \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sin\left(\frac{\log z}{2i} - \frac{s_0}{2}\right)} e^{-\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}\left(\frac{\log z}{2i} - \frac{s_0}{2}\right)^2}$$

et, par suite,

$$\frac{\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(z e^{-is_0} + \frac{1}{z e^{-is_0}}\right) + q^{4p}\right]}{\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(z e^{is_0} + \frac{1}{z e^{is_0}}\right) + q^{4p}\right]}$$

$$= \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} \frac{\sin\left(\frac{\log z}{2i} + \frac{s_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log z}{2i} - \frac{s_0}{2}\right)} e^{\frac{2\eta_1\omega_1 s_0}{i\pi^2}\log z}.$$

On trouve aisément

$$\frac{\sin\left(\frac{\log z}{2i} + \frac{s_0}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\log z}{2i} - \frac{s_0}{2}\right)} = e^{-is_0}\frac{1 - z e^{is_0}}{1 - z e^{-is_0}};$$

d'où nous tirons enfin

$$\frac{\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(z e^{-is_0} + \frac{1}{z e^{-is_0}}\right) + q^{4p}\right]}{\prod_1^\infty \left[1 - q^{2p}\left(z e^{is_0} + \frac{1}{z e^{is_0}}\right) + q^{4p}\right]}$$

$$= \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} \frac{1 - z e^{is_0}}{1 - z e^{-is_0}} e^{\frac{2\eta_1\omega_1 s_0}{i\pi^2}\log z - is_0}.$$

De même, on a la formule

$$\sigma_3(2\omega_1 v) = \frac{e^{2\eta_1\omega_1 v^2}}{\prod_1^{\infty}(1-q^{2p-1})^2}\prod_1^{\infty}(1-2q^{2p-1}\cos 2\pi v + q^{4p-2}).$$

et un calcul entièrement analogue au précédent nous donne

$$\frac{\prod_1^{\infty}\left[1-q^{2p-1}\left(ze^{-is_1}+\frac{1}{ze^{-is_1}}\right)+q^{4p-2}\right]}{\prod_1^{\infty}\left[1-q^{2p-1}\left(ze^{is_1}+\frac{1}{ze^{is_1}}\right)+q^{4p-2}\right]}$$

$$= \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}s_1\right)}\, e^{\frac{2\eta_1\omega_1 s_1}{i\pi^2}\log z}.$$

Transportons ces résultats dans $\Omega_0(z)$; les termes en $\log\frac{1-ze^{is_0}}{1-ze^{-is_0}}$ se détruisent; un terme constant et un terme en $\log z$ disparaissent en vertu de la condition (4) et il reste finalement

$$\Omega_0(z) = -\frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$

$$+\frac{\beta i}{\pi}\log\frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s_1\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z + \frac{\omega_1}{\pi}s_1\right)}.$$

Observons, avant d'aller plus loin, quelle est la signification de la condition (4); pour cela, imaginons que nous fassions décrire au point z un circuit fermé entourant la frontière intérieure une fois dans le sens positif, alors $\log z$ revient à sa détermination primitive, augmentée de $2i\pi$; or, on sait que l'on a

$$\sigma(u+2\omega_1) = -e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma u,$$

$$\sigma_3(u+2\omega_1) = e^{2\eta_1(u+\omega_1)}\sigma_3 u;$$

par suite, la valeur de $\Omega_0(z)$ est modifiée par l'addition de la quantité

$$\frac{4i\eta_1\omega_1}{\pi^2}(\alpha s_0 - \beta s_1),$$

laquelle est nulle, d'après la condition en question. Cette condi-

tion est donc celle qui assure l'uniformité de la fonction $\Omega_2(z)$.

Cela posé, supposons que nous décomposions la circonférence extérieure en n petits arcs, ayant pour angles au centre t_1, t_2, ..., t_p, ..., t_n, les arguments des points milieux étant θ_1, θ_2, ..., θ_p, ..., θ_n; à chacun de ces arcs, faisons correspondre une certaine constante α_1, α_2, ..., α_p, ..., α_n; décomposons, en même temps, la circonférence intérieure en n arcs d'angles au centre u_1, u_2, ..., u_n, les points milieux ayant les mêmes arguments que ci-dessus, et attribuons à ces arcs les constantes β_1, β_2, ..., β_n. Formons alors la fonction

$$\Omega_1(z) = -\frac{i}{\pi}\sum_{p=1}^{n}\alpha_p \log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_p - \frac{\omega_1}{2\pi}t_p\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_p + \frac{\omega_1}{2\pi}t_p\right)}$$

$$-\frac{i}{\pi}\sum_{p=1}^{n}\beta_p \log \frac{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_p - \frac{\omega_1}{2\pi}u_p\right)}{\sigma_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_p + \frac{\omega_1}{2\pi}u_p\right)},$$

superposition de n fonctions analogues à $\Omega_2(z)$. Nous obtiendrons une fonction analytique dont la partie réelle prendra sur les arcs des deux circonférences les valeurs respectives α_p ou β_p. Pour que cette fonction soit uniforme dans le domaine annulaire, il est inutile d'exiger qu'on ait séparément n conditions de la forme

$$\alpha_p t_p = \beta_p u_p,$$

mais seulement la condition globale

$$\sum_1^n \alpha_p t_p = \sum_1^n \beta_p u_p$$

qui, d'après le calcul du paragraphe antérieur, exprime évidemment l'uniformité.

Passons maintenant à la limite, en faisant croître indéfiniment le nombre des arcs, chacun d'eux devenant infiniment petit; désignons par $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ les deux fonctions représentant la succession des valeurs des α et des β sur les deux frontières. Il est clair que la condition précédente fournira, à la limite, la condition

$$(5) \qquad \int_0^{2\pi}\Phi(s)\,ds = \int_0^{2\pi}\Psi(s)\,ds.$$

Voyons ce que devient $\Omega_1(z)$. Comme on a approximativement,

pour t_p petit,

$$\log \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_p - \frac{\omega_1}{2\pi}t_p\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_p + \frac{\omega_1}{2\pi}t_p\right)} = -\frac{\omega_1}{\pi}t_p\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}\theta_p\right),$$

avec une formule analogue pour la fonction σ_3, on aperçoit, par un calcul élémentaire, que $\Omega_1(z)$ prend finalement la forme

$$(5') \qquad \Omega_1(z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds$$
$$+ \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(s)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds.$$

D'après sa formation même, cette fonction $\Omega(z)$ résout très vraisemblablement le problème posé. Il est aisé de le vérifier, en s'assurant que la partie réelle de $\Omega(z)$ tend vers $\Phi(s)$ quand le point z s'approche du point e^{is} de la frontière extérieure par exemple. A cet effet, formons la différence

$$\Omega(z) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,\frac{1 + ze^{-is}}{1 - ze^{-is}}\,ds = \Omega(z) - \omega(z).$$

Introduisons les fonctions ϑ de Jacobi : on sait (Tannery et Molk, form. XXXIII, 7) que

$$\zeta u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{1}{2\omega_1}\,\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)};$$

d'autre part, la formule (Tannery et Molk, form. XXXII, 5) conduit à

$$\frac{\vartheta_1' v}{\vartheta_1 v} = \pi\cot\pi v + \sum_1^{\infty}\frac{4\pi q^{n}\sin 2\pi v}{1 - 2q^{2n}\cos 2\pi v + q^{4n}}.$$

On en conclut

$$\zeta u = \frac{\eta_1 u}{\omega_1} + \frac{\pi}{2\omega_1}\cot\frac{\pi u}{2\omega_1} + \frac{2\pi}{\omega_1}\sum_1^{\infty}\frac{q^{n}\sin\frac{\pi u}{\omega_1}}{1 - 2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\omega_1} + q^{4n}}.$$

En faisant dans ces formules $u = \frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s$, on a faci-

lement

$$\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) = \frac{\eta_1}{\pi}\left(\frac{1}{i}\log z - s\right) - \frac{i\pi}{2\omega_1}\,\frac{1+ze^{-is}}{1-ze^{-is}}$$

$$+\frac{\pi}{i\omega_1}\sum_1^{\infty}\frac{q^n\left(ze^{-is}-\dfrac{1}{z}e^{is}\right)}{1-q^{2n}\left(ze^{-is}+\dfrac{1}{z}e^{is}\right)+q^{4n}}$$

et

$$U(z,s) = \frac{i\omega_1}{\pi}\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1+ze^{-is}}{1-ze^{-is}}$$

$$= \frac{\eta_1\omega_1}{\pi^2}(\log z - is) + \sum_1^{\infty}\frac{q^n\left(ze^{-is}-\dfrac{1}{z}e^{is}\right)}{(1-q^{2n}ze^{-is})\left(1-q^{2n}\dfrac{1}{z}e^{is}\right)}.$$

Sous cette forme, il est manifeste que la fonction de z

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(s)U(z,s)\,ds$$

se comporte régulièrement dans la couronne et y est continue, *y compris sur la circonférence de rayon* 1. Lorsque le point z tend vers le point $e^{i\theta}$, l'intégrale ci-dessus tend d'ailleurs vers la valeur imaginaire pure

$$\frac{i}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\eta_1\omega_1}{\pi^2}(\theta - s) - \sum_1^{\infty}\frac{2q^n\sin(\theta - s)}{1-2q^{2n}\cos(\theta - s)+q^{4n}}\right]ds.$$

Dans les mêmes conditions, l'intégrale

$$\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(s)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds$$

tend également vers une valeur imaginaire pure, et il en résulte que la partie réelle de la différence $\Omega(z) - \omega(z)$ tend vers zéro. Par suite, la façon dont se comporte la partie réelle de $\Omega(z)$ au voisinage de la frontière $|z| = 1$, dépend uniquement de la façon dont s'y comporte la partie réelle de $\omega(z)$. Par suite, enfin, à cause des résultats d'un paragraphe antérieur, la fonction $\Omega(z)$ répond bien au problème posé, en ce qui concerne la frontière extérieure. Un raisonnement analogue étant évidemment valable pour la frontière intérieure, il est manifeste que le problème est complètement résolu par notre fonction $\Omega(z)$.

Si l'on a besoin d'utiliser la fonction $\Omega(z)$ sur les frontières mêmes, les formules ci-dessus ne seront pas directement applicables, pour des raisons analogues à celles qu'on a signalées plus haut relativement à $\omega(z)$. Mais reprenons d'abord la fonc-

tion $\Omega_1(z)$, et faisons-y $z = e^{i\varepsilon}$, ε étant supposé pour l'instant différent d'un des points de subdivision ; la partie réelle de $\Omega(z)$ devient égale à l'un des α_p ; quant à la partie imaginaire, on constate sans peine qu'en la désignant par $i\mathfrak{T}(\varepsilon)$, on a

$$\mathfrak{T}(\varepsilon) = -\frac{1}{\pi}\sum \alpha_p \log\left|\frac{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p-\frac{t_p}{2}\right)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p+\frac{t_p}{2}\right)}\right| + \frac{1}{\pi}\sum \beta_p \log\left|\frac{\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p-\frac{u_p}{2}\right)}{\sigma_3\frac{\omega_1}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p+\frac{u_p}{2}\right)}\right|.$$

On voit que, lorsqu'on passera à la limite, la seconde somme tendra vers

$$-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(s)\,\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\varepsilon-s)\,ds,$$

mais la première somme comporte un terme qui, sous sa forme actuelle, deviendrait infini, de sorte que la limite n'est pas immédiate. Mais on peut certainement écrire, en supposant, pour simplifier, que l'un des points de subdivision ait un argument nul,

$$\Sigma\alpha_p\log\left|\frac{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p-\frac{t_p}{2}\right)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p+\frac{t_p}{2}\right)}\right| = \Sigma[\alpha_p-\Phi(\varepsilon)]\log\left|\frac{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p-\frac{t_p}{2}\right)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}\left(\varepsilon-\theta_p+\frac{t_p}{2}\right)}\right|$$
$$-\Phi(\varepsilon)\log\left|\frac{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(\varepsilon-2\pi)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon}\right|$$

et sous cette forme, on voit apparaître la limite de la première somme et, par suite, la limite $T(\varepsilon)$ de $\mathfrak{T}(\varepsilon)$, sous la forme

$$T(\varepsilon) = \frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(s)-\Phi(\varepsilon)]\,\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\varepsilon-s)\,ds$$
$$+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\Phi(\varepsilon)-\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(s)\,\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\varepsilon-s)\,ds.$$

On trouve de même que, pour un point $qe^{i\varepsilon}$ de la circonférence intérieure, la partie imaginaire $i\mathfrak{T}'$ de $\Omega(z)$ est fournie par

$$\mathfrak{T}'(\varepsilon) = -\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\,\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}(\varepsilon-s)\,ds$$
$$+\frac{\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(s)-\Psi(\varepsilon)]\,\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(\varepsilon-s)\,ds+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}\left(1-\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\Psi(\varepsilon).$$

Ceci amène tout naturellement à transformer l'expression de la fonction $\Omega(z)$ de manière à lui donner une forme valable jusqu'en un point des frontières. Supposons, pour le moment, z intérieur à l'anneau, et écrivons le premier terme de Ω ainsi qu'il suit :

$$\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(s)-\Phi(z)]\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds$$
$$+\frac{i\omega_1}{\pi^2}\Phi(z)\int_0^{2\pi}\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds.$$

On trouve aisément

$$\int_0^{2\pi}\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds=-\frac{\pi}{\omega_1}\left[i\pi-2\eta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\omega_1\right)\right]$$

et, par suite, on peut écrire

$$\Omega(z)=\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Phi(s)-\Phi(z)]\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds$$
$$-\Phi(z)-\frac{2i\eta_1\omega_1}{\pi}\Phi(z)\left(\frac{\log z}{i\pi}-1\right)$$
$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(s)\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds.$$

Sous cette forme, l'expression de $\Omega(z)$ est valable jusqu'au point $e^{i\varepsilon}$ de la frontière extérieure.

Par un calcul analogue, on peut mettre Ω sous la forme

$$\Omega(z)=\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(s)\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds$$
$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}[\Psi(s)-\Psi(z)]\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log z-\frac{\omega_1}{\pi}s\right)ds$$
$$-\frac{2i\eta_1\omega_1}{\pi}\Psi(z)\left(\frac{\log z}{i\pi}-1\right),$$

qui est valable jusqu'au point $qe^{i\varepsilon}$ de la frontière intérieure.

CHAPITRE III.

ÉTUDE DE LA RÉSISTANCE OPPOSÉE PAR UN FLUIDE AU MOUVEMENT D'UN SOLIDE QU'IL BAIGNE.

Paradoxe de d'Alembert. — Nous supposerons essentiellement tout d'abord qu'il s'agisse d'un mouvement *partout continu* (en ce qui concerne la pression et la vitesse) et, en outre, permanent et sans tourbillons.

Plaçons un solide dans un courant fluide limité par un tube cylindrique, et supposons pour un instant le fluide incompressible : le solide sera animé d'une translation uniforme, ou mieux, nous pourrons imaginer, en imprimant à tout le système une translation opposée, que le solide est au repos, et le fluide animé d'une vitesse uniforme à l'infini. Isolons alors le volume fluide compris entre le cylindre et deux sections droites très éloignées des deux côtés du solide ; décomposons ce volume fluide en tubes de courant, à chacun desquels nous appliquerons le théorème d'Euler ; les pressions latérales sur les filets disparaîtront deux par deux, et il restera la pression à la surface du solide et la pression à la surface extérieure. Or, en négligeant les variations de pression dues à la pesanteur, négligeables dans les conditions usuelles, on a, d'après le théorème de Bernoulli,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \text{const.}$$

A de grandes distances du solide, la vitesse V_0 est parallèle aux génératrices du cylindre, et elle est la même des deux côtés, car le débit doit être le même à l'amont et à l'aval ; donc la pression est aussi la même sur les deux sections éloignées, et les pressions sur ces deux faces se détruisent ; les pressions sur les bords du canal n'ont, d'autre part, pas de composante parallèle au courant. De plus, les deux quantités de mouvement sont les mêmes sur les deux sections droites en question, et elles se détruisent également. Le théorème d'Euler donne donc, finalement,

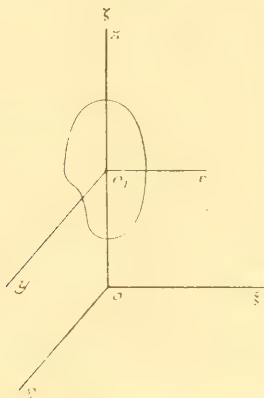
Résistance parallèle au courant = o.

La pression totale exercée sur le solide n'a donc pas de composante s'opposant au mouvement. Ceci constitue le paradoxe de d'Alembert.

Si l'on suppose que les parois du canal s'éloignent indéfiniment du solide, on aura le cas d'un solide placé dans un courant illimité dans tous les sens. Mais nous allons reprendre la question, dans un cas du reste plus général, par un calcul dû à M. U. Cisotti (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1909, II).

Nous supposerons ρ variable (fluide compressible) et nous attacherons trois axes $Oxyz$ au solide S mobile avec la vitesse V_0

Fig. 5.



par rapport à un système fixe $O\xi\eta\zeta$, les axes des z et des ζ coïncidant, de sorte qu'on aura

$$\xi = x; \qquad \eta = y; \qquad \zeta = z + V_0 t.$$

Le mouvement étant permanent relativement au solide, les vitesses u, v, w, une fois exprimées en fonction de x, y, z, ne dépendront pas du temps t. Ceci posé, on a l'équation de continuité et les équations du mouvement sous la forme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial \xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial \eta} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \xi},$$

. . . .

Mais si une fonction $f_1(x, y, z)$ ne dépend pas de t, on a

$$f_1(x, y, z) = f_1(\xi, \eta, \zeta - V_0 t) = f(\xi, \eta, \zeta, t)$$

et, par suite,

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = \frac{\partial f_1}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{\partial f_1}{\partial y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{\partial f_1}{\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -V_0\frac{\partial f_1}{\partial z}.$$

Par conséquent, les équations précédentes peuvent s'écrire

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\rho w)}{\partial z} = V_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = V_0 \dfrac{\partial u}{\partial z} - \left(u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right.$$

D'autre part, sur la surface σ de S, la vitesse du fluide est assujettie à être tangentielle, ce qui donne, en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale à σ, vers le solide,

$$u\alpha + v\beta + w\gamma = V_0\gamma \quad \text{sur } \sigma.$$

A l'infini, nous supposons le fluide au repos,

$$u = v = w = 0, \quad \text{à l'infini.}$$

Ceci posé, la résistance directe éprouvée par le solide dans le sens du mouvement est

$$R_z = \int\int_\sigma p\gamma\, d\sigma;$$

ou, d'après la formule de Green,

$$(7)\qquad R_z = \int\int\int_V \frac{\partial p}{\partial z}\, d\omega,$$

en désignant par $d\omega$ l'élément de volume dans le fluide, et en tenant compte de ce que l'intégrale $\int\int p\gamma\, d\sigma$, étendue à la surface d'une sphère de rayon très grand, est nulle; en effet, le fluide étant en repos à l'infini, la pression y est constante, en l'absence de forces extérieures, et l'on a

$$\lim \int\int_{\text{sphère }\infty} p\gamma\, d\sigma = p_\infty \int\int \gamma\, d\sigma = 0.$$

Revenant à R_z donnée par (7), nous voyons que la dernière équation (6) donne

$$R_z = V_0 \int\int\int_V \rho \frac{\partial w}{\partial z}\, d\omega - \int\int\int_V \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) d\omega.$$

Transformons par la formule de Green, en tenant compte de

la première équation (6), il vient successivement

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_V \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\omega \\
&\quad = \int\int\int_V \left[\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v w)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}\right]d\omega \\
&\qquad - \int\int\int_V w\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]d\omega \\
&\quad = \int\int_\sigma \rho w(\alpha u + \beta v + \gamma w)\,d\sigma - V_0\int\int\int_V w\frac{\partial\rho}{\partial z}\,d\omega \\
&\quad = V_0\int\int_\sigma \rho w\gamma\,d\sigma - V_0\int\int\int_V w\frac{\partial\rho}{\partial z}\,d\omega.
\end{aligned}$$

en supposant que u, v, w s'annulent à l'infini suffisamment vite pour que $\int\int_{\text{sphère }\infty} \rho w(u\alpha + v\beta + w\gamma)\,d\sigma$ tende vers zéro. On aura ensuite, en supposant encore que $\int\int_{\text{sphère }\infty} \rho w\gamma\,d\sigma$ tende aussi vers zéro,

$$\begin{aligned}
&\int\int\int_V \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\omega \\
&\quad = V_0\int\int\int_V \left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z} - w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right]d\omega = V_0\int\int\int_V \rho\frac{\partial w}{\partial z}\,d\omega.
\end{aligned}$$

Et, par conséquent, on en déduit finalement

$$R_z = 0,$$

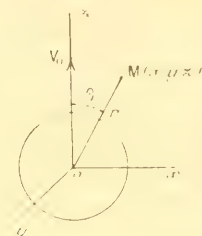
ce qu'on désirait démontrer.

Du point de vue analytique, l'annulation assez rapide de la vitesse à l'infini est, en effet, assurée, comme on peut le déduire facilement de théories connues et, par conséquent, le paradoxe constitué par le résultat trouvé ci-dessus, était contenu dans les hypothèses mêmes sur lesquelles on a fondé le calcul. Mais si nous sommes bien assurés de trouver des valeurs continues pour u, v, w, p, ρ satisfaisant aux équations (6), à l'équation complémentaire et aux conditions aux limites, rien ne nous permet d'affirmer *a priori* que les valeurs trouvées pour p seront partout positives. Or, si la pression p prend des valeurs négatives, la solution analytique n'est pas une solution physiquement acceptable. C'est justement ce qui se passe, comme nous le constaterons un peu plus loin. Du point de vue physique, la solution envisagée ci-dessus n'a donc aucun sens.

Donnons en passant un exemple explicite d'une telle fausse solution : supposons qu'il s'agisse d'une sphère de rayon R, jouant le rôle du solide S précédent, placé dans un fluide incom-

pressible; nous supposons un potentiel φ pour les vitesses; à la surface de la sphère, la vitesse (normale) doit être celle de

Fig. 6.



l'élément de surface, car la vitesse relative est uniquement tangentielle, donc

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = V_0 \cos\theta.$$

On vérifiera sans peine que la fonction harmonique

$$\varphi = -\frac{V_0 R^3}{2r^2}\cos\theta$$

répond à cette condition, tout en donnant des vitesses nulles à l'infini. Les lignes de courant dans un plan méridien contenant Oz sont les trajectoires orthogonales des lignes $\varphi = \text{const}$. On trouve

$$\psi = \frac{V_0 R^3}{2r}\sin^2\theta = \text{const}.$$

Si la sphère était immobile, et le fluide animé de la vitesse V_0 à l'infini, le potentiel des vitesses serait

$$\varphi = -V_0\cos\theta\left(r + \frac{R^3}{2r^2}\right) = -V_0 z\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)$$

et l'on aurait

$$\psi = -\frac{V_0}{2}\sin^2\theta\left(r^2 - \frac{R^3}{r}\right).$$

Le mouvement relatif est permanent, les trajectoires des molécules fluides sont les lignes $\psi = \text{const}.$; ces trajectoires sont symétriques par rapport au plan xOy, et V^2 prend la même valeur aux points symétriques; il en est donc de même de la pression p, définie par la formule

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const}.$$

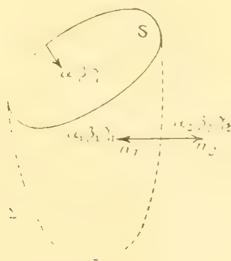
On vérifie donc que la résistance totale éprouvée par la sphère est bien nulle.

Parmi les hypothèses faites au début du calcul qui a conduit au paradoxe de d'Alembert, il y en a donc au moins une qui n'est pas conforme à la réalité physique, et qu'il va nous falloir rejeter; cette hypothèse est celle de la continuité : nous avions admis que la pression et les vitesses variaient d'une façon continue dans tout le fluide : or s'il est, en effet, impossible de réaliser des discontinuités pour la pression dans un fluide à l'état permanent, l'expérience journalière nous montre qu'il n'en est pas de même pour les vitesses; il peut fort bien se former ce que l'on appelle des « surfaces de discontinuité » pour les vitesses : surfaces telles que la vitesse, variant continûment de part et d'autre, éprouve une variation brusque finie en traversant ces surfaces; c'est, par exemple, l'existence de telles surfaces qui explique la présence de la zone tranquille qu'on observe derrière le coupe-vent d'une automobile.

Paradoxe de M. M. Brillouin. — Le paradoxe de d'Alembert reste inévitable, même si l'on introduit dans le fluide des surfaces de discontinuité, tant qu'on n'admet pas que ces surfaces s'étendent jusqu'à l'infini.

Reprenons, en effet, notre fluide compressible, contenant le solide S, et supposons que les vitesses u, v, w s'annulent à l'infini de telle manière que les intégrales de surface étendues à une sphère de rayon très grand, tendent vers zéro à la limite; soient, d'autre part, Σ les surfaces de discontinuité, supposées non étendues à l'infini; nous distinguerons par l'indice 1 ou 2 toutes les quantités u, v, w, p, ρ, ..., relatives à un côté ou l'autre de Σ. En reprenant le calcul tel qu'il a été exposé plus haut, nous trouverons d'abord immédiatement pour la résistance directe

Fig. 7.



$$R_z = V_0 \int\int\int_V \rho \frac{dw}{dz} d\omega - \int\int\int_V \rho \left(u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right) d\omega.$$

Transformons par la formule de Green, en tenant compte de

la présence de Σ, il vient

$$\int\int\int_V \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)d\omega$$
$$=\int\int\int_V\left[\frac{\partial(\rho u w)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v w)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z}\right]d\omega$$
$$-\int\int\int_V w\left[\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right]d\omega$$
$$=\int\int_\sigma \rho w(u\alpha+v\beta+w\gamma)\,d\sigma - V_0\int\int\int_V w\frac{\partial\rho}{\partial z}\,d\omega$$
$$+\int\int_\Sigma[\rho_1 w_1(u_1\alpha_1+v_1\beta_1+w_1\gamma_1)+\rho_2 w_2(u_2\alpha_2+v_2\beta_2+w_2\gamma_2)]\,d\Sigma,$$

c'est-à-dire

$$\int\int\int_V \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+\ldots\right)d\omega$$
$$=V_0\int\int_\sigma \rho w\gamma\,d\sigma - V_0\int\int\int_V w\frac{\partial\rho}{\partial z}\,d\omega$$
$$+\int\int_\Sigma[\rho_1 w_1(u_1\alpha_1+\ldots)+\rho_2 w_2(u_2\alpha_2+\ldots)]\,d\Sigma.$$

En appliquant encore une fois la formule de Green pour le premier terme,

$$\int\int\int_V \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+\ldots\right)d\omega$$
$$=V_0\int\int\int_V \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\,d\omega - V_0\int\int_\Sigma(\rho_1 w_1\gamma_1+\rho_2 w_2\gamma_2)\,d\Sigma$$
$$-V_0\int\int\int_V w\frac{\partial\rho}{\partial z}\,d\omega+\int\int_\Sigma[\rho_1 w_1(u_1\alpha_1+\ldots)+\rho_2 w_2(u_2\alpha_2+\ldots)]\,d\Sigma.$$

Or, si le régime est permanent, toute surface de discontinuité se déplace parallèlement à elle-même avec la vitesse V_0; donc on a

$$u_1\alpha_1+v_1\beta_1+w_1\gamma_1=V_0\gamma_1,$$
$$u_2\alpha_2+v_2\beta_2+w_2\gamma_2=V_0\gamma_2,$$

et il reste

$$\int\int\int_V \rho\left(u\frac{\partial w}{\partial x}+\ldots\right)d\omega = V_0\int\int\int_V\left[\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}-w\frac{\partial\rho}{\partial z}\right]d\omega$$
$$=V_0\int\int\int_V \rho\frac{\partial w}{\partial z}\,d\omega.$$

Donc, enfin,

$$R_z=0,$$

ce qui nous redonne le paradoxe de d'Alembert.

Donc la présence (indispensable d'après ce qui précède) des surfaces de discontinuité ne permet d'échapper au paradoxe que si ces surfaces s'éloignent indéfiniment.

Cette démonstration est faite en supposant le fluide indéfini dans toutes les directions. Le même résultat subsiste (H. VILLAT, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1915) pour un fluide limité, qui s'étend à l'infini dans une direction au moins.

Dans ces conditions, l'hypothèse du repos à l'infini n'est plus non plus réalisée : le solide mobile doit entraîner avec lui tout un sillage, étendu à l'infini, et qui se déplace en faisant corps avec lui.

Mise à part la question de la valeur de la résistance R_z, si les surfaces de discontinuité ne s'étendent pas à l'infini, M. M. Brillouin a démontré qu'il y a sûrement dans le fluide des régions où la pression est négative.

Nous supposerons le mouvement permanent, le fluide incompressible, et la pression égale à p_0 infini. Le solide S est fixe, et le fluide animé de la vitesse V_0. Dans le sillage, supposé faire corps avec S, la pression est constante et égale par suite à p_0. Dans le fluide en mouvement, on a partout

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{1}{2}V^2 + \text{const.}$$

Sur la surface de discontinuité Σ, on a $p = p_0$, donc la vitesse V est constante sur Σ, donc elle y est égale à V_0, qui est sa valeur à l'infini. On a donc dans le fluide

$$\frac{p - p_0}{\rho} = \frac{1}{2}(V_0^2 - V^2).$$

Or p_0, pression à l'infini, est une constante positive en somme arbitraire, et qui peut, selon les conditions d'expérience, recevoir une valeur (positive) quelconque. Pour que p ne puisse jamais devenir négatif, il faut que V ne devienne nulle part supérieur à V_0.

Cela étant, supposons, comme il est permis, $p_0 = 0$. En modifiant d'une façon insignifiante les raisonnements d'un paragraphe antérieur (p. 22), en étendant les intégrations à l'intérieur d'un volume fluide limité par une surface S_1, et en désignant par α, β, γ les cosinus de la normale à S_1 vers l'extérieur, on trouvera immédiatement

$$\iint_{S_1} p\gamma\, d\sigma + \iint_{S_1} \rho w(u\alpha + v\beta + w\gamma)\, d\sigma - \iint_{S_1} \rho V_0 w\gamma\, d\sigma = 0.$$

Cette égalité reste vraie même si le volume fluide est découpé par des surfaces de discontinuité, rencontrées ou non par S_1. Si

d'autre part, nous supposons le fluide incompressible, l'équation de continuité entraîne l'égalité

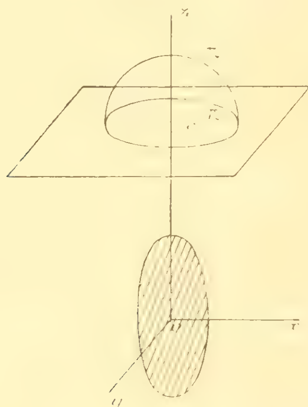
$$\iint_{S_1} (u\alpha + v\beta + w\gamma)\,d\sigma = 0.$$

Une combinaison simple des deux équations ci-dessus donne

$$\iint p\gamma\,d\sigma + \rho\iint_{S_1} w^2\gamma\,d\sigma - \rho\iint_{S_1} (w - V_0)(u\alpha + v\beta)\,d\sigma = 0.$$

Formons alors une surface S_1 au moyen d'un plan P normal à Oz et ne rencontrant pas le corps solide, et construisons une

Fig. 8.



hémisphère de centre C dans P, du côté où ne se trouve pas le solide : S_1 sera constitué par le grand cercle π et la demi-sphère π'. Sur le grand cercle, on aura

$$\alpha = \beta = 0, \qquad \gamma = \varepsilon = \pm 1$$

(+1 si P est en avant du solide, −1 s'il est en arrière). Donc

$$\varepsilon\iint_{\pi} (p - \rho w^2)\,d\pi + \iint_{\pi'} (p - \rho w^2)\gamma\,d\sigma$$
$$- \rho\iint_{\pi'} (w - V_0)(u\alpha + v\beta)\,d\sigma = 0.$$

Alors, si le fluide est en repos à l'infini, de telle manière que r^2u, r^2v, r^2w, r^2p tendent vers zéro quand la distance r d'un point à l'origine devient infinie, si nous faisons croître indéfini-

ment le rayon de π', les intégrales sur π' disparaissent et il reste

$$\int\int_{P} (p - \rho\, w^2)\, d\pi = 0.$$

Cela exige que p soit négatif, au moins dans certaines régions du plan P. C'est bien le paradoxe de M. Brillouin.

Cette démonstration n'exige pas le repos partout à l'infini, elle vaut si le repos a lieu seulement du côté du plan P où ne se trouve pas le solide. Pour éviter le paradoxe, il faut donc que le repos n'ait lieu à l'infini, ni à l'arrière d'un plan perpendiculaire à la translation du solide et mené à l'arrière du solide, ni à l'avant d'un plan perpendiculaire à cette translation et mené à l'avant du solide.

Ainsi, de tout ce qui précède, il résulte que nécessairement la surface de discontinuité doit s'éloigner à l'infini et qu'elle doit être convexe vers le fluide en mouvement. Par suite, la largeur de la nappe stagnante ne peut jamais diminuer quand on s'éloigne du solide; tout au plus peut-elle tendre vers une limite, pour certaines directions normales à la direction générale du courant.

Donc, en l'absence de viscosité, le trouble à l'arrière persiste à toute distance. Pour la *naissance* du mouvement discontinu, ce n'est pas la viscosité qui joue un rôle important, c'est l'instabilité des pressions négatives. Or, s'il est possible, en privant un liquide de tout gaz dissous, de lui faire supporter des pressions négatives, cela reste une expérience delicate : dans tout liquide aéré et qui contient quelques poussières, les pressions plus petites que la tension maxima de vapeur sous la température actuelle du liquide sont instables. Donc, dans un liquide naturel, surtout s'il est peu visqueux, la surface de discontinuité naîtra facilement et sa naissance sera accompagnée de la formation de petites bulles de gaz. Si la viscosité intervient, ce sera surtout pour résoudre, à l'arrière, la surface de discontinuité en spires persistantes figurant des tourbillons.

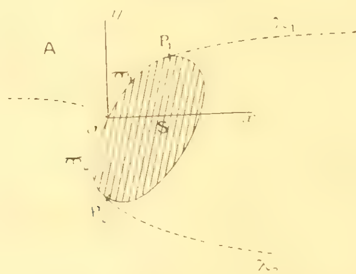
Quoi qu'il en soit, nous allons voir dans le Chapitre suivant la mise en œuvre des hypothèses qui viennent de s'introduire dans la théorie du fluide parfait.

CHAPITRE IV.

LES MOUVEMENTS DISCONTINUS DANS UN FLUIDE PARFAIT INDÉFINI.

Nous supposons le fluide incompressible à deux dimensions (nous ferons $\rho = 1$, par un choix d'unités convenable); nous admettons en outre l'absence de tourbillons. La vitesse du courant fluide qui vient heurter le solide S est horizontale et égale à l'unité aux grandes distances. Parmi les lignes de courant il en

Fig. 9.



est une qui, en un point O du front du solide, se divise pour entourer l'obstacle, dont elle se détache de part et d'autre en deux points P_1 et P_2, pour délimiter à l'arrière le sillage, nécessairement indéfini, que nous supposons faire corps avec le solide. Partout la vitesse V du fluide doit être positive, sauf au point O où elle sera nulle. Bien entendu, nous admettons que le profil de S est suffisamment régulier pour que le courant n'abandonne pas ce profil en quelque point, pour venir ensuite le rejoindre plus loin à l'arrière (ce cas est, du reste, parfaitement possible, et l'on verra plus loin la manière de le traiter par le calcul).

Introduisant le potentiel des vitesses φ, et la fonction de courant ψ, que nous supposerons nuls tous deux au point O, nous poserons

$$z = x + iy, \qquad w = u - iv, \qquad f = \varphi + i\psi,$$

en sorte qu'on a

$$\frac{df}{dz} = w,$$

et l'on doit avoir les conditions suivantes :

D'abord $\psi = 0$ sur les lignes $\varpi_1, \varpi_2, \lambda_1, \lambda_2$ (*fig.* 9).

Ensuite, comme $\frac{dz}{dx} = u$ tend vers 1 quand z s'éloigne indéfiniment, on doit avoir

$$\lim |f| = \infty \qquad \text{pour} \qquad z = \infty.$$

Puis, dans le sillage, où la vitesse est nulle, la pression est constante ; désignons-la par p_0 ; dans le fluide en mouvement, l'équation de Bernoulli fournit alors la condition

$$(7) \qquad p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2),$$

la constante ayant été choisie de façon qu'à l'infini sur les bords du sillage on ait à la fois $V = 1$ et $p = p_0$.

Introduisons la représentation de la région A occupée par le fluide en mouvement, sur le plan de la variable f. Il est clair que cette représentation est fournie par le plan f tout entier, coupé le long du demi-axe réel qui correspond aux lignes $\varpi_1\lambda_1, \varpi_2\lambda_2$. φ va du reste constamment en croissant quand z parcourt $\varpi_1\lambda_1$ par exemple, car en appelant s l'arc compté sur la ligne de courant, on a

$$\frac{dx}{ds} = \frac{u}{V}, \qquad \frac{dy}{ds} = \frac{v}{V}, \qquad \frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = V > 0.$$

f est une fonction de z régulière dans la région A ; pour z infini, f est infini. L'équation $f = f(z)$ définit la correspondance entre les deux plans.

Inversement du reste, z est une fonction de f, dans le plan f coupé le long de la demi-droite Ox ; elle y est régulière et uniforme, avec la condition $\lim |z| = \infty$ pour f infini. De même, la dérivée $\frac{dz}{df}$ est aussi une fonction analytique de f dans le plan coupé. Si nous parvenions à déterminer cette dérivée $\frac{dz}{df}$ en fonction de f, nous en tirerions z par une quadrature en fonction de f et nous pourrions ensuite achever tous les calculs et répartir les vitesses dans le plan z, en éliminant f ou bien en le conservant comme variable auxiliaire.

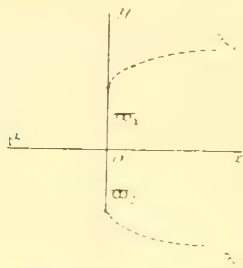
Voici un cas particulier où cette détermination est particulièrement simple et immédiate.

Supposons (*fig.* 10) que le solide soit une lame plane normale au courant ; désignons par μ la portion de ligne de courant à l'avant de l'obstacle, qui arrive normalement et qui, par raison de symétrie, coïncide avec l'axe des x ; on a dans le plan f une représentation symétrique et il suffirait de s'occuper seulement d'une moitié du plan f (et du plan z). Un calcul élémentaire prouvera

que la représentation (conforme) des plans f et z l'un sur l'autre est obtenue par la relation

$$\frac{dz}{df}\left(=\frac{1}{w}=\frac{u+iv}{u^2+v^2}\right)=\frac{i\sqrt{k}+\sqrt{f-k}}{\sqrt{f}}.$$

Fig. 10.



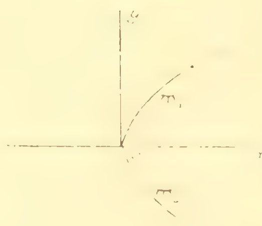
En effet, pour f réel $> k$, on a bien $|w|=1$ (ligne λ_1); pour f réel négatif, w est réel et v nul (ligne μ). Pour $O < f < k$, w est imaginaire pure, et par suite u est nul (paroi ϖ). De là, on

Fig. 11.



peut donc remonter au plan z par des calculs faciles, qu'on achèvera sans peine.

Fig. 12.



De cette solution particulière, en observant que

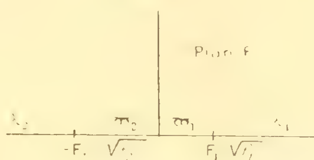
$$\lim \prod_{k=a}^{b} [\theta(k)]^{f(k)\,dk} = e^{\int_a^b f(k)\log[\theta(k)]\,dk},$$

on peut tirer une solution assez générale

$$\frac{dz}{df} = e^{\int_0^{\cdots} \log\left([illegible] \right) g \cdots d\lambda}$$

faisant correspondre au demi-plan f la configuration de la figure 12. Mais cette solution n'est pas la plus générale pour les mouvements symétriques, et nous développerons plutôt la théorie comme il suit, selon la méthode essentielle si brillamment exposée par M. Levi-Civita dans son Mémoire fondamental (*Circolo di Palermo*, 1907).

Fig. 13.



A cet effet, nous commencerons par faire correspondre au plan f coupé, par une transformation conforme appropriée, l'aire

Fig. 14.

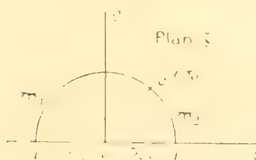


d'une demi-circonférence, en posant successivement

$$f = F^2,$$

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2)Z + \frac{1}{2}(F_1 - F_2).$$

Fig. 15.



Au point $F = 0$ correspondra $Z = -\dfrac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}$; posons enfin

$$\cos\sigma_0 = \frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}, \qquad \frac{1}{2}(F_1 + F_2) = a, \qquad F = a(Z - \cos\sigma_0)$$

et

$$Z = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Dans le plan ζ nous avons bien le domaine demi-circulaire représenté par la figure 15.

La quantité $w = u - iv$ était dans A une fonction de z, donc de Z, donc enfin de ζ. Sur λ_1 et λ_2, on a $|w| = 1$. Posons

$$w = e^{-i\omega}$$

et

$$\omega = \theta + i\tau;$$

on aura de suite

$$V = e^{\tau}, \qquad \frac{u - iv}{V} = e^{i\theta},$$

ce qui donne la signification géométrique et cinématique de θ et de τ.

ω sera une fonction de ζ régulière dans le demi-cercle ; sur le diamètre horizontal, elle est réelle, car $V = 1$ et $\tau = 0$. Comme $\zeta = 0$ correspond à l'infini, on doit avoir

$$\omega(0) = 0.$$

Enfin, sur la demi-circonférence, ω sera finie et continue, sauf au point $\zeta = e^{i\sigma_0}$, où l'on aura

$$i\omega = -\infty \qquad (w = 0).$$

Les lignes de courant $\psi = \text{const.}$ se tireront de l'expression de f en fonction de ζ, laquelle est, d'après les transformations précédentes,

$$f = a^2\left[\cos\sigma_0 - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]^2.$$

On en conclut que les lignes de courant sont représentées dans le plan ζ par les courbes

$$\eta\left[\xi(\xi^2 + \eta^2 + 1) - 2\cos\sigma_0(\xi^2 + \eta^2)\right](\xi^2 + \eta^2 - 1) = b(\xi^2 + \eta^2)^2$$

(plus précisément, par les portions de ces courbes situées dans le demi-cercle de rayon 1).

Supposant connue la fonction $\omega(\zeta)$, la position de chaque élément fluide résultera ensuite de l'équation

$$dz = \frac{df}{w} = e^{i\omega}\,df = \frac{1}{2}a^2 e^{i\omega}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta},$$

d'où l'on tirera

$$z = \int_{e^{i\sigma}}^{\zeta} e^{i\omega}\,df.$$

L'élément d'arc sera, par suite,

$$|dz| = e^{-\tau}|df|$$

et, par conséquent, la courbure sera

$$c = e^{\tau}\frac{d\theta}{|df|}.$$

Sur les lignes λ_1 et λ_2 notamment, il restera

$$c = \frac{d\theta}{|df|}.$$

Les parois ϖ_1 et ϖ_2 de S correspondront aux points $\zeta = e^{i\sigma}$ ($0 < \sigma < \pi$) de la demi-circonférence. Pour ces points, on aura

$$df = -2a^2(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma$$

et, par suite,

$$x = 2a^2\int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau}\cos\theta(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma,$$

$$y = 2a^2\int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau}\sin\theta(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma.$$

On constatera sans peine que la longueur d'un arc sur S est donnée, en comptant les longueurs à partir du point O, par

$$\varpi = 2a^2\int_{\sigma}^{\sigma_0} e^{-\tau}(\cos\sigma - \cos\sigma_0)\sin\sigma\, d\sigma.$$

Soit $z_1 = x_1 + iy_1$ le point P_1; la ligne λ_1 sera fournie par

$$z = z_1 + \int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega}\, df = z_1 - \frac{a^2}{2}\int_{-1}^{\zeta} e^{i\omega}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$(-1 < \zeta < 0),$$

restant réel; l'élément d'arc aura pour valeur

$$d\lambda = |e^{i\omega}\, df| = |df|$$

et, par suite, la longueur d'un arc de λ_1, compté à partir de P_1, sera donnée par

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}a^2\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)^2 - a^2\cos\sigma_0\left(\zeta - \frac{1}{\zeta} + 2\right).$$

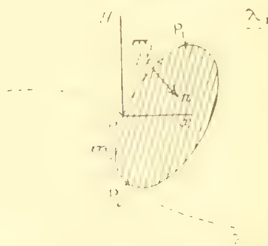
Résultats analogues pour λ_2.

La résistance éprouvée par le profil de S a pour composantes

$$R_x = \int_\gamma p \cos(n, x)\, d\gamma,$$

$$R_y = \int_\gamma p \cos(n, y)\, d\gamma;$$

Fig. 16.

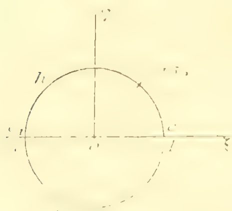


p désignant p_0 dans le sillage, et partout ailleurs la pression donnée par (7) et γ étant le contour total de S. Le terme en p_0 donne une contribution nulle, et il reste

$$R_x = \frac{1}{2}\int_{\varpi_1+\varpi_2} (1 - V^2)\cos(n, x)\, d\varpi,$$

$$R_y = \frac{1}{2}\int_{\varpi_1+\varpi_2} (1 - V^2)\cos(n, y)\, d\varpi,$$

Fig. 17.



résultat dépendant uniquement de l'état du mouvement sur $\varpi_1 + \varpi_2$. Si l'on décrit ϖ dans le sens P_2OP_1, on aura

$$\cos(n, x)\, d\varpi = dy, \qquad \cos(n, y)\, d\varpi = -dx$$

et

$$R = R_x - iR_y = \frac{1}{2i}\int_{P_2OP_1} (1 - V^2)\, dz$$

ou encore

$$R = \frac{1}{2i}\int_{ahc_1} e^{i\omega}\, df - \frac{1}{2i}\int_{bhc_1} e^{2\tau + i\omega}\, df.$$

Or, la fonction $\omega(\zeta)$, réelle sur le diamètre $-1+1$, est susceptible d'être prolongée analytiquement dans la demi-circonférence symétrique de la première par rapport à l'axe réel, les valeurs attribuées à cette fonction étant conjuguées aux points ζ symétriques. Il en résulte que, sur la circonférence elle-même, on peut écrire successivement

$$2\tau + i\omega = i(\theta + i\tau) + 2\tau = i(\theta - i\tau) = i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$

D'autre part, la différentielle df reste la même quand on change ζ en $\frac{1}{\zeta}$, donc

$$\int_{c'c_1} e^{2\tau + i\omega}\, df = \int_{ch'_1} e^{i\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)}\, df = \int_{ch_1c_1} e^{i\omega(\zeta)}\, df,$$

et enfin

$$\mathrm{R} = \frac{1}{2i}\int_{ch_1c_1h'_1c} e^{i\omega(\zeta)}\, df.$$

Le calcul de R est donc ramené à celui des résidus de la fonction

$$\frac{1}{2}a^2 e^{i\omega(\zeta)}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta} - 2\cos\sigma_0\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{1}{\zeta}$$

aux points singuliers situés dans le cercle $|\zeta| = 1$; il n'y a qu'un pôle, $\zeta = 0$, au voisinage duquel on peut écrire

$$e^{i\omega(\zeta)} = 1 + i\zeta\omega'(0) + \frac{\zeta^2}{2}\left[i\omega''(0) - \omega'^2(0)\right] + \ldots.$$

On en conclut immédiatement

$$\mathrm{R} = \frac{\pi a^2}{4}\omega'^2(0) - \frac{i\pi a^2}{2}\left[2\cos\sigma_0\,\omega'(0) - \frac{1}{2}\omega''(0)\right],$$

c'est-à-dire en séparant

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathrm{R}_x = \dfrac{\pi a^2}{4}\omega'^2(0), \\[2ex] \mathrm{R}_y = \dfrac{\pi a^2}{2}\left[2\cos\sigma_0\,\omega'(0) - \dfrac{1}{2}\omega''(0)\right]. \end{cases}$$

Comme on le voit, tout est donc entièrement ramené à la détermination de la fonction $\omega(\zeta)$; celle-ci une fois connue, le problème est complètement achevé par des quadratures. Or, cette détermination résulte très aisément du Chapitre II. En effet, la partie réelle de ω représente l'angle que fait la vitesse avec l'axe Ox. Si donc on connaît le profil de S, on sait comment varie θ lorsque le point ζ décrit la demi-circonférence supérieure et, par suite, lorsqu'il décrit toute la circonférence. Soit $\theta = \Phi(\sigma)$ la relation qui lie θ à σ le long du profil ; la fonction, qui doit

prendre des valeurs conjuguées aux points ζ conjugués, aura donc la forme

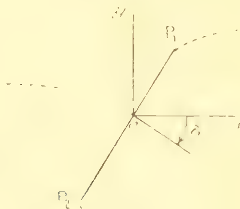
$$(9) \qquad \omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}\,\Phi(\sigma)\,d\sigma$$

et la condition $\omega(0) = 0$ nous imposera, d'autre part, la relation

$$\int_0^{\pi} \Phi(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Exemple. — Plaçons-nous dans le cas d'un obstacle formé d'une lame rectiligne P_1OP_2, incliné d'un angle δ sur Oy ; de sorte que les deux segments OP_1 et OP_2 font avec Ox les angles $\delta \mp \frac{\pi}{2}$. Nous allons appliquer à ce cas simple les méthodes précédentes, bien qu'il soit possible de traiter ce cas directement

Fig. 18.



par d'autres procédés faciles. Nous allons voir qu'on peut calculer de suite les deux éléments qui nous intéressent le plus, à savoir la longueur de la lame et la résistance qu'elle éprouve.

Tout d'abord, la condition générale (2) impose la relation

$$\sigma_0 = \delta - \frac{\pi}{2}.$$

Ensuite, pour avoir les parois ϖ_1 et ϖ_2, il faut connaître $\omega(\zeta)$ sur la circonférence limite. Sur ϖ_2 par exemple, en appliquant la formule (3) du Chapitre II, il vient $(o < \sigma < \sigma_0)$, en désignant momentanément par $\delta = \alpha$ les angles de OP_1, OP_2 avec Ox, $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\tau = \frac{\alpha}{\pi}\int_{\sigma_0}^{\pi}\left(\cot\frac{\sigma-s}{2} + \cot\frac{\sigma+s}{2}\right)ds,$$

c'est-à-dire

$$\tau = \frac{2\alpha}{\pi}\log\left|\frac{\sin\frac{\sigma_0+\sigma}{2}}{\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}}\right|.$$

Même résultat sur la paroi ϖ_1 ($\sigma_0 < \sigma < \pi$). Donc, dans les deux cas,

$$e^{\tau} = \left(\frac{\sin\frac{\sigma_0+\sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}\right|}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}},$$

et, puisque ici $\alpha = \frac{\pi}{2}$, la longueur d'une paroi sera donnée par

$$\varpi = 2a^2\int_{\sigma}^{\sigma_0}\frac{\sin\frac{\sigma_0+\sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}\right|}(\cos\sigma-\cos\sigma_0)\sin\sigma\,d\sigma.$$

Or, des transformations tout élémentaires donnent

$$\frac{\sin\frac{\sigma_0+\sigma}{2}}{\left|\sin\frac{\sigma_0-\sigma}{2}\right|}(\cos\sigma-\cos\sigma_0) = 2\sin^2\frac{\sigma+\sigma_0}{2} = [1-\cos(\sigma+\sigma_0)]\times\operatorname{sgn}(\sigma_0-\sigma),$$

donc

$$\varpi = \left\{a^2\int_{\sigma}^{\sigma_0}[2\sin\sigma-\sin(2\sigma+\sigma_0)+\sin\sigma_0]\,d\sigma\right\}\times\operatorname{sgn}(\sigma_0-\sigma).$$

Par suite, pour $\sigma=\pi$ ou $\sigma=0$, il vient

$$\varpi_1 = a^2[2+2\cos\sigma_0+2\cos\sigma_0\sin^2\sigma_0+(\pi-\sigma_0)\sin\sigma_0],$$

$$\varpi_2 = a^2(2-2\cos\sigma_0-2\cos\sigma_0\sin^2\sigma_0+\sigma_0\sin\sigma_0).$$

La longueur totale de la lame est donc

$$l = \varpi_1+\varpi_2 = a^2(4+\pi\sin\sigma_0).$$

Calculons maintenant la résistance. Celle-ci dépend, comme on l'a vu, des nombres $\omega'(0)$ et $\omega''(0)$. Or, on a actuellement

$$\omega_0(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\hat{\delta}-\alpha)\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2}\,d\sigma;$$

il est aisé, mais inutile, d'effectuer la quadrature. On a

$$\frac{1-\zeta^2}{1-2\zeta\cos\sigma+\zeta^2} = 1+2\zeta\cos\sigma+2\zeta^2\cos 2\sigma+\ldots$$

Donc

$$\omega'_0(0) = \frac{2}{\pi}\Big[\big((\delta-\alpha)\sin\sigma\big)_0^{\sigma_0} - \big((\delta+\alpha)\sin\sigma\big)_{\sigma_0}^{\pi}\Big] = -\frac{4\alpha}{\pi}\sin\sigma_0$$

et

$$\omega''_0(0) = \frac{2}{\pi}\Big[\big((\delta-\alpha)\sin 2\sigma\big)_0^{\sigma_0} - \big((\delta+\alpha)\sin 2\sigma\big)_{\sigma_0}^{\pi}\Big] = -\frac{4\alpha}{\pi}\sin 2\sigma_0.$$

Par conséquent $\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right)$

$$R = R_x + iR_y = a^2\pi\sin^2\sigma_0 - \frac{ia^2\pi}{2}\sin 2\sigma_0.$$

De là on déduit notamment la formule célèbre, due à lord Rayleigh :

$$\frac{R_x}{l} = \frac{\pi\sin^2\sigma_0}{4+\pi\sin\sigma_0} \qquad \text{ou, si l'on veut,} \qquad \frac{R_x}{l} = \frac{\pi\cos^2\delta}{4+\pi\cos\delta}.$$

Pour $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\delta = 0$, la pression totale se réduit à sa composante R_x, et dans ce cas on a

$$\frac{R}{l} = \frac{\pi}{4+\pi}.$$

Pour une lame rectiligne, les choses vont donc toutes seules : il n'y a qu'une solution, qui détermine *a posteriori* le point O de bipartition du courant sur l'avant de la lame. Les choses sont plus compliquées si la paroi présente un angle. Dans le cas général, je dis que la présence d'un angle vif, sauf au point mort O, est inadmissible sur la paroi, à moins de renoncer à l'une des hypothèses faites initialement, à savoir à l'hypothèse que le fluide suit le contour sans le quitter en aucun point. Soient, en effet, 2α la valeur de l'angle en question sur la paroi, $\omega(\zeta)$ la fonction qui correspond à cette paroi, e^{is_0} le point qui correspond au sommet A de l'angle, et $\delta \pm \alpha$ les angles avec Ox des vitesses en A aux deux parois (en admettant que le fluide ne quitte pas le profil). Construisons alors la différence $\omega(\zeta) - \omega_0(\zeta)$ où $\omega_0(\zeta)$ représente la fonction qui correspond aux données $\delta \mp \alpha$ sur les deux arcs de circonférence $0 < \sigma < s_0$ et $s_0 < \sigma < \pi$. Pour cette différence, la partie réelle reste continue au point A, cette différence elle-même est donc continue en A, et par suite on a, pour les parties imaginaires,

$$\tau = \tau_0 + \text{une fonction continue}$$

(nulle du reste pour $\sigma = s_0$). Or, d'après les calculs qui précèdent,

on a vu que

$$e^{\tau} = \left(\frac{\sin\left|\dfrac{s_0-\sigma}{2}\right|}{\sin\dfrac{s_0-\sigma}{2}}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}}.$$

Donc, si $\alpha > 0$ (*fig.* 19), e^{τ} reste fini et même s'annule pour

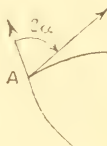
Fig. 19.



$\sigma = s_0$; τ_0 tend vers $-\infty$, τ aussi, et $V = e^{\tau}$ est nul ; il n'y a pas de difficulté.

Mais si, au contraire, $\alpha < 0$ (*fig.* 20), c'est-à-dire s'il s'agit

Fig. 20.



d'un angle vif vers le courant, e^{τ} devient $+\infty$ et V devient égal à $-\infty$ au point A ; la pression p deviendrait donc égale à $-\infty$, et ceci est physiquement inacceptable.

Donc, pour un obstacle anguleux formé de deux lames rectilignes P_1AP_2 avec un angle vif en A, la seule solution qui puisse résulter des calculs antérieurs doit placer le point mort en A. La difficulté correspondant à la figure 20 cesse alors de se présenter, car les directions du courant le long des deux parois qui se croisent en A sont orientées du point A vers ces parois, ce qui n'est pas le cas pour l'une des deux directions qu'indique la figure 20. Dans ces conditions, le rapport des longueurs AP_1 et AP_2 est entièrement déterminé. C'est-à-dire qu'à un angle donné, avec deux lames de longueurs données, il correspond une orientation bien déterminée, pour laquelle le problème peut être résolu par ce qui précède. *Il ne l'est pas pour toute autre orientation*. Il y a là une grosse difficulté, que nous apprendrons à résoudre dans un Chapitre ultérieur.

La difficulté n'existe pas quand l'angle en A se présente en creux devant le courant, car il n'y a alors pas d'impossibilité à placer le point mort ailleurs qu'au point A, et l'arbitraire qui

subsiste dans le choix du point A permet d'effectuer ce choix de façon à obtenir finalement deux lames de longueurs données (*cf.* H. VILLAT, *Annales de l'École Normale*, 1914; *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1915).

Mais il existe des difficultés d'un autre ordre, que M. Brillouin a signalées, et qui peuvent rendre illusoire la solution du problème général.

Pour que la solution soit physiquement acceptable, il faut évidemment : 1° que les vitesses restent partout effectivement inférieures à 1, ce qui assure que la pression ne prenne nulle part de valeurs négatives; 2° que lorsqu'on revient au plan z, on tombe bien sur un domaine d'un seul tenant, où les lignes frontières ne se recoupent pas, ni elles-mêmes, ni les unes les autres. Or, M. Brillouin a mis en évidence sur des cas simples la possibilité de tels recoupements.

On trouvera dans un Mémoire du *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1914) un certain nombre de résultats que j'ai obtenus sur ce sujet. Nous donnerons ici quelques théorèmes intéressant les cas les plus usuels, en nous plaçant dans l'hypothèse où le mouvement et l'obstacle sont symétriques par rapport à l'axe Ox; c'est dire que l'on a

$$\Phi(\pi-\varepsilon) = -\Phi(\varepsilon).$$

Pour ce qui concerne les vitesses ($V = e^{\tau}$), il suffit d'être assuré que τ ne devient jamais positif et, puisque τ est une fonction harmonique régulière, il suffit enfin d'être assuré que τ ne devient pas positif sur les frontières. Sur le diamètre horizontal, τ est nul; il ne reste donc à s'inquiéter que de ce qui se passe pour $\zeta = e^{is}$. Pour cela, il sera utile de connaître comment varie τ et, pour cela, de calculer la dérivée $\frac{d\tau}{ds}$. D'après la théorie des fonctions analytiques, les deux fonctions associées θ et τ donnent naissance à l'égalité

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\theta}{dn},$$

en appelant n la normale extérieure au cercle.

Ceci posé, reprenons la fonction

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon)\,\frac{1+\zeta e^{-i\varepsilon}}{1-\zeta e^{-i\varepsilon}}\,d\varepsilon.$$

Posons $\zeta = \rho e^{is}$ et remarquons que l'on a, pour $\rho = 1$,

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\varepsilon)\,\frac{e^{i(s-\varepsilon)}}{[1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}]^2}\,d\varepsilon.$$

Supposons maintenant, pour nous mettre dans les conditions de

l'application ultérieure, que $\Phi(\varepsilon)$ soit continue, sauf pour $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$; supposons en outre que la dérivée $\Phi'(\varepsilon)$ existe et soit elle-même continue, sauf peut-être pour les valeurs $\varepsilon = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$. Alors, une intégration par parties nous donnera

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{i}{\pi\rho}\left[\Phi(\varepsilon)\frac{1}{1-e^{i(s-\varepsilon)}}\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\Phi'(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}},$$

c'est-à-dire, en tenant compte des discontinuités, et transformant le dernier terme,

$$\frac{d\omega}{d\rho} = \frac{i}{\pi\rho}\left[\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right)}{1-\rho e^{i\left(s-\frac{\pi}{2}\right)}} + \frac{\Phi\left(\frac{3\pi}{2}-0\right)-\Phi\left(\frac{3\pi}{2}+0\right)}{1-\rho e^{i\left(s-\frac{3\pi}{2}\right)}}\right]$$

$$-\frac{i}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(s)}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}}d\varepsilon - \frac{i\Phi'(s)}{\pi\rho}\int_0^{2\pi}\frac{d\varepsilon}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}}.$$

Or, pour $\rho < 1$, on a

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varepsilon}{1-\rho e^{i(s-\varepsilon)}} = 2\pi.$$

Il reste donc, en prenant la partie réelle,

$$\frac{d\theta}{d\rho} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(s)\right]\frac{\sin(s-\varepsilon)}{1-2\rho\cos(s-\varepsilon)+\rho^2}d\varepsilon$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right]\frac{\sin\left(s-\frac{\pi}{2}\right)}{1-2\rho\cos\left(s-\frac{\pi}{2}\right)+\rho^2}$$

$$-\frac{1}{\pi}\left[\Phi\left(\frac{3\pi}{2}-0\right)-\Phi\left(\frac{3\pi}{2}+0\right)\right]\frac{\sin\left(s-\frac{3\pi}{2}\right)}{1-2\rho\cos\left(s-\frac{3\pi}{2}\right)+\rho^2}.$$

Et en faisant tendre ρ vers 1, on en conclut, d'après une remarque antérieure, que sur la circonférence on a

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Phi'(\varepsilon)-\Phi'(s)\right]\cot\frac{s-\varepsilon}{2}d\varepsilon$$

$$-\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right)}{2\pi}\cot\frac{s-\frac{\pi}{2}}{2}$$

$$-\frac{\Phi\left(\frac{3\pi}{2}-0\right)-\Phi\left(\frac{3\pi}{2}+0\right)}{2\pi}\cot\frac{s-\frac{3\pi}{2}}{2}.$$

Or, on a

$$\Phi(2\pi - \varepsilon) = \Phi(\varepsilon), \qquad \Phi'(2\pi - \varepsilon) = -\Phi'(\varepsilon),$$
$$\Phi(\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon), \qquad \Phi'(\pi - \varepsilon) = \Phi'(\varepsilon);$$

on en conclut facilement

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{2\cos s}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon - \Phi'(\varepsilon)\sin s}{\cos^2\varepsilon - \cos^2 s} d\varepsilon - \frac{2\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)}{\pi \cos s},$$

D'où le théorème suivant : *Si* $\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon$ *est une fonction de* ε *croissante dans l'intervalle* $0, \frac{\pi}{2}$, τ *est toujours décroissant, donc toujours négatif, puisqu'il part d'une valeur nulle ; la vitesse croît de* 0 *à* 1 *quand on parcourt les arcs* OP_1 *ou* OP_2.

Dans le cas général où $\Phi(\varepsilon)$ est quelconque, il est toujours nécessaire que, pour $s = 0$, la dérivée commence par être négative, ce qui donne

$$(10) \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon} d\varepsilon - \Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) \leq 0.$$

Le cas limite de l'égalité correspond à une configuration spéciale très importante ; les profils qui y satisfont sont appelés *proues* pour la raison qui suit. Sur une des lignes λ_1 ou λ_2, le rayon de courbure est

$$R = \left|\frac{ds}{d\theta}\right|.$$

Or

$$|ds| = |dz| = \frac{a^2}{2}\left|\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}\right| = \frac{a^2}{2}\left|\frac{1 - \zeta^4}{\zeta^3} d\zeta\right|.$$

Donc

$$R = \frac{a^2}{2} \frac{|1 - \zeta^4|}{\left|\zeta^3 \frac{d\theta}{d\zeta}\right|}.$$

Plaçons-nous maintenant très près du point P_2 par exemple, alors $\frac{d\theta}{d\zeta}$ tend vers la dérivée normale calculée plus haut et devient

$$-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)}{\sin\varepsilon} d\varepsilon + \frac{2}{\pi}\Phi\left(\frac{\pi}{2} - 0\right).$$

Si donc cette dernière quantité n'est pas nulle, comme $1 - \zeta^4$ s'annule au point P_2, c'est que le rayon de courbure est nul ; la ligne de glissement λ_2 s'infléchit donc immédiatement à l'arrière de l'obstacle ; cela n'a pas d'inconvénient si cet obstacle est, comme on dit, en *gouttière*, c'est-à-dire s'il est constitué par

une lame pratiquement sans épaisseur, arrêtée en P_1 et P_2, mais, en général, il n'en est pas ainsi : l'obstacle est un solide qui se continue, dans le sillage, au delà des points P_1 et P_2, et ces derniers points, qui résultent du calcul même, sont *a priori* des points du profil sans propriété particulière du point de vue géométrique. L'existence du solide dans ces conditions est incompatible avec la nullité du rayon de courbure des lignes de glissement au départ. Dans ce cas, il est donc nécessaire que l'on ait l'*égalité* (10), et le profil est alors dit une proue.

Disons quelques mots au sujet de l'allure des lignes de glissement. Nous supposerons, comme c'est presque toujours le cas pour l'application, que le long du profil P_1OP_2 ne se recoupant pas lui-même, l'angle θ du courant avec l'axe Ox reste compris entre $-\pi$ et $+\pi$. Dans ces conditions, on voit de suite que, si θ décroît constamment lorsque ζ réel varie de 0 à 1, il n'y aura pas de recoupements possibles, les lignes λ s'écartant progressivement de Ox, et le domaine du plan z sera bien d'un seul tenant. Or θ, qui est sur λ égal à $\omega(\zeta)$, est donné par

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-\zeta^2)\Phi(\varepsilon)}{1-2\zeta\cos\varepsilon+\zeta^2}\,d\varepsilon = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\zeta e^{i\varepsilon}}{1-\zeta e^{-i\varepsilon}}\,\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon.$$

Un calcul absolument analogue à celui de la page (43) fournit successivement

$$\frac{d\omega}{d\zeta} = \frac{i}{\pi\zeta}\left[\Phi(\varepsilon)\frac{1}{1-\zeta e^{i\varepsilon}}\right]_0^{2\pi} - \frac{i}{\pi\zeta}\int_0^{2\pi}\Phi'(\varepsilon)\frac{d\varepsilon}{1-\zeta e^{i\varepsilon}}$$

$$= \frac{i}{\pi\zeta}\left[\frac{\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)-\Phi\left(\frac{\pi}{2}+0\right)}{1-i\zeta} + \frac{\Phi\left(\frac{3\pi}{2}+0\right)-\Phi\left(\frac{3\pi}{2}-0\right)}{1-i\zeta}\right]$$

$$- \frac{i}{\pi\zeta}\int_0^{2\pi}\frac{\Phi(\varepsilon)\,d\varepsilon}{1-\zeta e^{-i\varepsilon}}$$

$$= \frac{4\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{\pi(1+\zeta^2)} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\Phi'(\varepsilon)\sin\varepsilon}{1-2\zeta\cos\varepsilon+\zeta^2}\,d\varepsilon$$

$$= \frac{4\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right)}{\pi(1+\zeta^2)} - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varepsilon\,\Phi'(\varepsilon)(1+\zeta^2)\,d\varepsilon}{(1-\zeta^2)^2+4\zeta^2\sin^2\varepsilon}.$$

Prenons le cas le plus intéressant, celui des profils *convexes* devant le courant : alors, entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, $\Phi'(\varepsilon)$ est négatif ; de plus, nous savons, par ce qui précède, qu'on a la condition, nécessaire d'autre part,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sin\varepsilon} - \Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) \leqq 0.$$

d'où l'on peut tirer, K étant un nombre supérieur ou égal à 1,

$$\Phi\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = K\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\sin\varepsilon}.$$

Ceci nous permet d'écrire

$$\frac{\pi}{4}\frac{d\omega}{d\zeta} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} H(\zeta,\varepsilon)\,\frac{\Phi'(\varepsilon)\,d\varepsilon}{(1-\zeta^2)\sin\varepsilon\,[(1-\zeta^2)^2+4\zeta^2\sin^2\varepsilon]},$$

en posant

$$H = K[(1-\zeta^2)^2+4\zeta^2\sin^2\varepsilon] - (1+\zeta^2)^2\sin^2\varepsilon.$$

Or, H est toujours positif pour $0 < \zeta < 1$; en effet, on a

$$H > (1-\zeta^2)^2+4\zeta^2\sin^2\varepsilon - (1+\zeta^2)^2\sin^2\varepsilon = (1-\zeta^2)^2\cos^2\varepsilon.$$

Il en résulte que $\frac{d\omega}{d\zeta}$ reste négatif et, par conséquent, θ décroît constamment le long de λ_2 supposé décrit en partant du point à l'infini.

Par conséquent, pour les obstacles convexes, jusques et y compris le cas des proues, les difficultés dont on a parlé plus haut sont éludées, pourvu que l'inégalité fondamentale (10) soit vérifiée.

On trouvera ailleurs un examen plus complet de ces sortes de questions (*loc. cit.*).

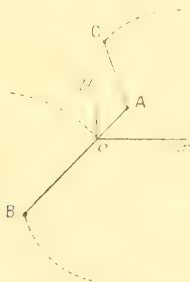
CHAPITRE V.

ÉTUDE DE L'OBSTACLE ANGULEUX.

Nous avons dit plus haut les difficultés qui se présentent lorsque le profil de l'obstacle comporte un point anguleux. Nous allons voir dans ce Chapitre comment il faut résoudre ces difficultés. Nous nous placerons dans le cas le plus caractéristique, où l'obstacle est formé par deux lames rectilignes, non dans le prolongement l'une de l'autre. Si le point de subdivision du courant coïncide avec le point anguleux, la question se trouve déjà résolue comme on l'a vu; mais cela ne peut se produire, nous le savons, que pour une inclinaison particulière.

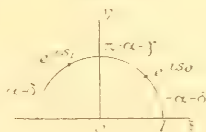
Supposons d'abord que l'angle présente un creux devant le courant; nous pourrons alors placer le point mort en O sur une

Fig. 21.



des deux lames, AB par exemple, sans introduire d'impossibilité *a priori*. Désignons alors par $\alpha - \delta$ et $\alpha - \delta$ les angles avec

Fig. 22.



Ox des segments AC et AB, $\left(\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi\right)$, et utilisons la représentation de M. Levi-Civita sur la demi-circonférence; nous

aurons la configuration ci-dessus et la fonction $\omega(\zeta)$ correspondante sera, d'après la formule (9) du Chapitre précédent et moyennant un calcul facile,

$$\omega(\zeta) = i \log \frac{\zeta - e^{is}}{1 - \zeta e^{is}} + \frac{i}{\pi}(2\alpha - \pi) \log \frac{\zeta - e^{is_1}}{1 - \zeta e^{is_1}} - (\delta - \alpha),$$

en désignant par e^{is_0} et e^{is_1} les points qui correspondent à O et A respectivement. On doit avoir entre ces nombres l'égalité

$$s_0 = \alpha - \delta - \frac{2\alpha - \pi}{\pi} s_1 \qquad (0 < s_0 < s_1 < \pi)$$

[l'égalité n'étant autre que la condition $\omega(0) = 0$]. Un calcul élémentaire donne pour les longueurs des lames

$$AB = 4a^2 \int_{s_0}^{s_1} \sin^2 \frac{s_0 - s}{2} \left(\frac{\sin \frac{s_1 + s}{2}}{\sin \frac{s_1 - s}{2}} \right)^{\frac{2\alpha - \pi}{\pi}} \sin s \, ds.$$

$$AC = 4a^2 \int_{s_1}^{\pi} \sin^2 \frac{s_0 - s}{2} \left(\frac{\sin \frac{s_1 + s}{2}}{\sin \frac{s_1 - s}{2}} \right)^{\frac{2\alpha - \pi}{\pi}} \sin s \, ds.$$

Les intégrales écrites ont un sens, puisque $0 < \frac{2\alpha - \pi}{\pi} < 1$.

Or, on voit tout de suite que s_1 est seulement assujetti à varier entre π et $\frac{\pi(\alpha - \delta)}{2\alpha}$. Pour $s_1 = \pi$, on a $s_0 = \pi - \alpha - \delta$, le rapport $\frac{AB}{AC}$ est infini, AC étant nul. Pour $s_1 = \frac{\pi(\alpha - \delta)}{2\alpha}$, $s_0 = s_1$, et le rapport $\frac{AB}{AC}$ prend une certaine valeur finie $\left(\frac{AB}{AC}\right)_1$. Pour des raisons de continuité aisées à développer, pour s_1 variant entre ces valeurs extrêmes, le rapport $\frac{AB}{AC}$ varie d'une façon continue et prend toutes les valeurs entre $+\infty$ et $\left(\frac{AB}{AC}\right)_1$.

Si maintenant nous plaçons le point de bipartition sur le côté AC, et si nous opérons d'une façon entièrement analogue à la précédente, nous verrons que dans ces conditions le rapport $\frac{AB}{AC}$ peut alors varier entre $\left(\frac{AB}{AC}\right)_1$ et O. De sorte qu'en plaçant convenablement le point O, soit sur AC, soit sur AB, nous pourrons toujours nous arranger pour que le rapport $\frac{AB}{AC}$ soit égal à

un nombre donné à l'avance. A cause du facteur de proportionnalité a, on pourra donc donner aux deux lames, d'inclinaisons données, des longueurs données à l'avance. D'où une solution du problème pour ce cas particulier.

Cette solution n'est du reste pas la seule possible, ainsi que nous le verrons dans un Chapitre ultérieur.

Cette solution est valable sans qu'il s'y présente d'impossibilités, car l'angle en A étant concave vers le courant, la vitesse en A devient nulle, conformément à une remarque générale faite plus haut; du reste, la vitesse est $V = e^{\tau}$ avec

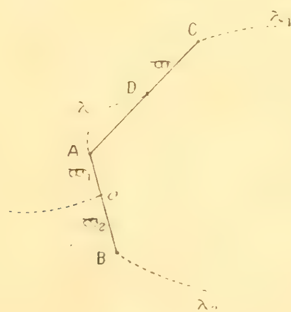
$$\tau = -\log\left|\frac{\zeta - e^{is}}{\zeta - e^{is_2}}\right| + \frac{\pi - 2\alpha}{\pi}\log\left|\frac{\zeta - e^{is_1}}{\zeta - e^{is_2}}\right|,$$

et elle est partout acceptable.

Mais il n'en serait plus ainsi, au cas où l'angle BAC se présenterait au courant pointe en avant, auquel cas on aurait $\pi - 2\alpha > 0$, et la vitesse deviendrait infinie; la solution analytique perdrait alors tout sens physique et il serait nécessaire de trouver une autre solution.

Sauf pour une valeur particulière de l'inclinaison, nous savons déjà que le point mort ne peut coïncider avec le sommet A du dièdre. Pour fixer les idées, supposons-le en O sur AB; la ligne de courant qui arrive en O (vitesse nulle) se subdivise en deux.

Fig. 23.



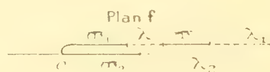
l'une suivra d'un côté la paroi OB et ira former la ligne de glissement λ_2, l'autre suivra d'abord OA; en A, la vitesse du courant n'est pas nulle; le courant se détache dans la direction OA, pour limiter le long de AC une plage de fluide mort, et vient ensuite se raccorder en un point D avec la paroi ADC qu'il suivra à partir de D. Si nous supposons le fluide en repos dans le sillage arrière et dans la région avoisinant AD, nous savons que nous devons en conclure que la vitesse, le long de $\lambda_1 \lambda_2$ et λ, sera constante; nous la supposerons égale à 1 le long de λ_1 et λ_2, et égale à v_1 le long de λ. v_1 est nécessairement inférieur à 1. Nous

poserons

$$a = -\log c_1, \qquad (a > 0).$$

Mettons en équations le problème ainsi posé. La représentation sur le plan f, du fluide en mouvement donne de suite la configu-

Fig. 24.



ration de la figure 24. A ce plan coupé nous ferons correspondre un demi-plan t par la relation

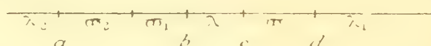
$$f = t^2.$$

Désignant ensuite par a, b, c, d les points indiqués sur la figure 25, la transformation

$$Z_1 = \int_{\alpha}^{t} \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)(t-c)(t-d)}}$$

fera correspondre à ce demi-plan l'aire intérieure à un rectangle du plan Z_1. Soient ω'_1 et ω'_3 les demi-périodes, la première réelle,

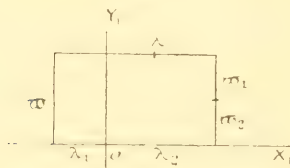
Fig. 25.



la seconde imaginaire pure, des fonctions elliptiques correspondantes (*cf.* par exemple Appell et Lacour, *Fonctions elliptiques*, p. 256); on pourra poser

$$t = \frac{1}{2} \frac{p'(Z_1 \mid \omega'_1, \omega'_3) - p'(\gamma \mid \omega'_1, \omega'_3)}{p(Z_1 \mid \omega'_1, \omega'_3) - p(\gamma \mid \omega'_1, \omega'_3)} + \frac{S_1}{4},$$

Fig. 26.



S_1 désignant la somme $a + b + c + d$, et γ une constante réelle convenable; les quatre sommets du rectangle sur lequel nous

avons réalisé la représentation conforme sont les points d'affixes

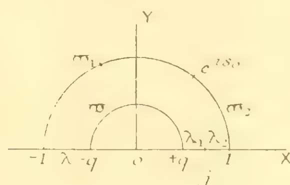
$$Z_1 = \frac{\gamma}{2}, \quad \frac{\gamma}{2} + \omega'_1, \quad -\frac{\gamma}{2} + \omega'_1 + \omega'_3, \quad -\frac{\gamma}{2} + \omega'_3.$$

Enfin on s'assure immédiatement que la transformation

$$Z_1 = \frac{\omega'_3}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1$$

fait correspondre au rectangle l'aire d'une demi-couronne circulaire de rayons 1 et q $\left(q = e^{-\frac{\pi\omega'_3}{\omega'_1}} < 1\right)$ selon la figure 17. Le

Fig. 17.



point $Z = j$ qui sépare λ_1 et λ_2 correspond à $Z_1 = 0$, en sorte que

$$j = q\, e^{\frac{i\pi\gamma}{2\omega'_3}}.$$

Le point e^{is_0} qui correspond à la séparation entre ϖ_1 et ϖ_2 satisfait à la condition que f soit nul en ce point, ce qui donne

$$\frac{S_1}{V} = -\frac{1}{2}\,\frac{p'\left(\frac{\omega'_3}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1 \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right) - p'(\gamma \mid \omega'_1\omega'_3)}{p\left(\frac{\omega'_3}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1 \,\middle|\, \omega'_1\omega'_3\right) - p(\gamma \mid \omega'_1\omega'_3)}.$$

Pour nous ramener aux notations du Chapitre II, posons

$$\omega'_3 = i\,\omega_1, \qquad \omega'_1 = \frac{\omega_3}{i},$$

de telle manière que q devienne égal à $e^{-\frac{\pi\omega_1}{i\omega_3}}$. Les formules d'homogénéité bien connues donnent alors

$$p(u \mid \omega'_1\omega'_3) = -p\left(\frac{u}{i} \,\middle|\, \omega_1\omega_3\right),$$

$$p'(u \mid \omega'_1\omega'_3) = i\,p'\left(\frac{u}{i} \,\middle|\, \omega_1\omega_3\right),$$

de sorte qu'en conservant dorénavant les demi-périodes $\omega_1\omega_3$ (que nous nous dispenserons désormais d'énoncer), on peut

écrire

$$f = \left[\frac{i}{2} \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p'\left(\frac{\gamma}{i}\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p\left(\frac{\gamma}{i}\right)} - \frac{i}{2} \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p'\left(\frac{\gamma}{i}\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p\left(\frac{\gamma}{i}\right)} \right]^2.$$

La donnée des nombres réels ω_1, $\frac{\omega_3}{i}$, s_0, γ, équivaut à celle des quatre nombres a, b, c, d.

Posant, comme au Chapitre III,

$$w = \frac{df}{dz} = u - iv = e^{-i\Omega(Z)} = e^{-i\Theta + T},$$

et imaginant pour un instant que la fonction $\Omega(Z)$ soit connue, nous en concluons

$$dz = e^{i\Omega(Z)}\, df,$$

c'est-à-dire

$$dz = \frac{i\omega_1}{\pi} e^{i\Omega(Z)} \left[\frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p'\left(\frac{\gamma}{i}\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p\left(\frac{\gamma}{i}\right)} - \frac{p'\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p'\left(\frac{\gamma}{i}\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p\left(\frac{\gamma}{i}\right)} \right]$$

$$\times \left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) \right] \frac{dZ}{Z}.$$

Cela posé, la fonction $\Omega(Z)$, où la signification cinématique de Θ et T est connue, sera régulière dans la demi-couronne ci-dessus et satisfera aux conditions suivantes :

$$T = 0 \quad \text{pour} \quad q < X < 1,$$

$$T = -a \quad \text{pour} \quad -1 < X < -q,$$

$$\Theta = \alpha - \delta \qquad \text{pour } Z = q\, e^{is} \ (0 < s < \pi),$$

$$\Theta = \begin{cases} \alpha - \delta \\ \alpha - \delta + \pi \end{cases} \qquad \text{pour } Z = e^{is} \begin{cases} 0 < s < s_0, \\ s_0 < s < \pi. \end{cases}$$

La construction d'une telle fonction résulte comme cas particulier de questions plus générales qu'on trouvera dans mon Mémoire des *Acta mathematica*, 1916 (*Sur la résolution de certaines*

équations intégrales.... Ici, cette fonction peut se déduire aisément des résultats du Chapitre II : il suffit d'observer que la différence

$$\Omega_1 = \Omega(Z) - \frac{a}{\pi}\log Z$$

(où l'on prend pour $\log Z$ la détermination réelle pour Z réel positif) est régulière dans la demi-couronne et *réelle sur l'axe réel*. Elle est donc prolongeable analytiquement dans la demi-couronne qui complète la première au-dessous de OX, et nous saurons la construire puisque la partie réelle est connue sur les frontières. La condition d'uniformité exigera la relation

$$(11)\qquad \pi - 2\alpha - s_0 - a\frac{\omega_3}{i\,\omega_1} = 0.$$

et un calcul simple conduira à l'expression

$$\Omega(Z) = i\log\frac{\sigma\left(\dfrac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \dfrac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\dfrac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \dfrac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$
$$- \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\log Z + \pi - \alpha - \delta,$$

où la détermination à choisir pour $\log\dfrac{\sigma(\ \ )}{\sigma(\ \ )}$ est celle qui est égale à $i\pi$ pour $Z = 1$, suivie ensuite par continuité.

Mais il reste à savoir si l'on peut disposer des paramètres ω_1, ω_3, γ, s_0, a, liés déjà par la relation (11), pour réaliser effectivement une solution acceptable et répondant exactement à la configuration proposée.

Tout d'abord, la position du solide par rapport au courant sera précisée en écrivant que la vitesse à l'infini est bien parallèle à Ox, c'est-à-dire que Θ est nul pour $Z = j$, d'où l'égalité

$$(12)\qquad i\log\frac{\sigma\left(\omega_3 - \dfrac{\gamma}{2i} - \dfrac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 + \dfrac{\gamma}{2i} + \dfrac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$
$$- \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a\right)\left(-\frac{\omega_1}{i\pi} - \frac{\gamma}{2\omega_1}\right) - \pi - \alpha - \delta = 0.$$

Ensuite, il faut que les lignes de glissement λ_1, λ_2, λ soient acceptables. Pour ce qui concerne λ_1 et λ_2, il suffit qu'elles soient constamment convexes vers le liquide en mouvement. $\Omega(Z)$ se réduisant à Θ pour de telles valeurs de Z, tout revient au calcul d'une dérivée, laquelle garde dans l'intervalle en question le

même signe que

$$U(Z) = \omega_1\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right]$$
$$+\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a;$$

cette dernière expression est continue dans l'intervalle, et sa dérivée

$$\frac{-\omega_1^2}{i\pi Z}\left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right]$$

garde un signe constant ; Θ sera donc toujours décroissant si les valeurs extrêmes de U sont négatives : ces valeurs extrêmes sont

$$-2\omega_1\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a$$

et

$$-2\omega_1\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a.$$

La première est supérieure à la seconde, car on a l'égalité

$$\zeta\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{p'\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - e_3} > 0.$$

Il suffit donc d'exiger l'inégalité

$$(13)\qquad -2\omega_1\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a < 0.$$

Passons à la ligne λ ; le dessin montre avec évidence que Θ doit y être d'abord décroissant, puis croissant, quand on parcourt λ du point A au point D, c'est-à-dire quand $Z(=-\rho)$ décrit le segment $-1, -q$ de l'axe réel ; en faisant dans $\Omega(Z)$, $\log Z = \log\rho + i\pi$, on trouve aisément

$$\Theta(\rho) = i\log\frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}$$
$$+\left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\log\rho + \pi - \alpha - \delta,$$

dont la dérivée a le signe de

$$\omega_1\left[\zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right] + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a.$$

Cette dernière fonction varie toujours dans le même sens dans

l'intervalle $q < \rho \leq 1$: pour que $\frac{d\Theta}{d\rho}$ soit d'abord positif, puis négatif, il faut et il suffit que l'on ait

$$(14) \qquad 2\omega_1 \zeta_2\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} s_0 - a < 0,$$

$$(15) \qquad 2\omega_1 \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} s_0 - a > 0.$$

Ces deux inégalités sont compatibles, car on a (Tannery et Molk, VII, 9, et XI, 2)

$$\zeta_2\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) = \frac{1}{2} \wp'\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) \left[\frac{1}{\wp\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - e_2} - \frac{1}{\wp\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - e_1}\right] < 0,$$

et elles entraînent l'inégalité (13), car

$$\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - \zeta_2\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) = \frac{1}{2} \wp'\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) \left[\frac{1}{\wp\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - e_3} - \frac{1}{\wp\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0\right) - e_2}\right] < 0.$$

Mais ceci ne suffit pas pour assurer que la ligne λ soit acceptable : en dehors de la condition d'alignement des trois points

Fig. 28.



ABC, il est nécessaire que λ ne se recoupe pas elle-même, en d'autres termes, qu'elle corresponde à un schéma tel que (I) et

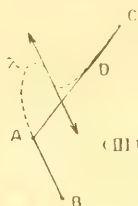
Fig. 29.



non à un schéma tel que (II). Nous allons faire voir que le minimum de Θ le long de λ ne peut atteindre la valeur $-\alpha - \delta$.

en sorte que le schéma (III), où la tangente au point d'inflexion est parallèle à AB, est un cas de figure limite (qui n'est du reste

Fig. 30.



pas atteint), ce qui exclut les configurations telles que (II) et assure le non-recoupement. On a en effet, le long de λ,

$$\Theta + \alpha - \delta = i \log \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\log\rho + \pi,$$

et l'inégalité (14) donne, puisque $\log\rho < 0$,

$$\left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\log\rho \geq -\frac{2\omega_1}{\pi}\log\rho\, \zeta_2\frac{\omega_1}{\pi}s_0.$$

Donc on peut écrire

$$\Theta + \alpha - \delta \geq i \log \frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} - \frac{2\omega_1}{\pi}\zeta_2\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\log\rho + \pi = \mathrm{H}(\rho).$$

On voit tout de suite que $\frac{d\mathrm{H}}{d\rho}$ reste positif pour $q < \rho < 1$, et la valeur initiale de H est

$$i \log \frac{\sigma_1\left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma_1\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} - \frac{2\omega_3}{i}\zeta_2\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \pi$$

$$= -\frac{2i\eta_3\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{2\omega_3}{i}\zeta_2\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \pi = \mathrm{I}(s_0).$$

Je dis que cette quantité est positive : considérons-la comme une

fonction de s_0, on a

$$\frac{dI}{ds_0} = \frac{2\omega_1}{i\pi}\left[\omega_3\, p\left(\frac{\omega_1}{\pi} s_0 - \omega_2\right) + \eta_3\right],$$

expression qui varie entre les limites $\frac{2\omega_1}{i\pi}(\omega_3 e_2 + \eta_3)$ et $\frac{2\omega_1}{i\pi}(\omega_3 e_3 + \eta_3)$. Pour montrer commodément que ces deux limites sont négatives, repassons aux demi-périodes ω_1, ω'_3 du début de ce Chapitre ; posons

$$q' = e^{-\frac{\pi\omega'_3}{i\omega'_1}} = e^{-\frac{i\pi\omega_1}{\omega_3}} \quad (< 1).$$

Les formules d'homogénéité, en désignant par des lettres accentuées toutes les quantités correspondant aux demi-périodes ω'_1, ω'_3, nous donnent :

$$e_1 = -e'_3, \qquad e_2 = -e'_2, \qquad e_3 = -e'_1,$$

$$\eta_1 = \zeta(\omega_1 \mid \omega_1\, \omega_3) = i\,\zeta(i\omega_1 \mid \omega'_1\, \omega'_3) = i\eta'_3,$$

$$\eta_3 = -i\eta'_1 ;$$

d'où

$$\frac{2\omega_1}{i\pi}(\omega_3 e_2 + \eta_3) = -\frac{2\omega'_1}{i\pi}(\omega_1 e'_2 - \eta'_1),$$

$$\frac{2\omega_1}{i\pi}(\omega_3 e_3 + \eta_3) = -\frac{2\omega'_1}{i\pi}(\omega'_1 e_1 + \eta'_1).$$

Or, on a (*cf.* Tannery et Molk, XXX, 1, 2)

$$(16)\quad \begin{cases} \omega'_1 e'_1 - \eta'_1 = \dfrac{\pi^2}{2\omega'_1}\left[\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_1^{\infty} \dfrac{4q'^{2n}}{(1 - q'^{2n})^2}\right], \\[2ex] \omega_1 e'_2 + \eta'_1 = \dfrac{\pi^2}{2\omega'_1} \displaystyle\sum_1^{\infty} \dfrac{4q'^{2n-1}}{(1 + q'^{2n-1})^2}. \end{cases}$$

Ces formules légitiment l'affirmation ci-dessus. $I(s_0)$ est donc une fonction décroissante de s_0 ; sa valeur finale est

$$-2i\eta_3\omega_1 - \frac{2\omega_3}{i}\zeta_2\omega_1 + \pi = 2i(\eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1) + \pi = 0 ;$$

donc $I(s_0)$ est toujours positif, ce qui achève la démonstration.

Il faut maintenant s'assurer que les vitesses sont partout acceptables, c'est-à-dire que T reste partout négatif. Comme, dans la demi-couronne, T est une fonction harmonique régulière, elle ne peut atteindre son maximum que sur les frontières ; il suffit donc de s'assurer des valeurs de T aux frontières et, par suite, seulement sur les demi-circonférences. Des calculs absolument ana-

logues aux précédents permettent de vérifier très simplement que T est partout effectivement négatif.

En résumé, nous avons à vérifier si l'on peut assujettir les constantes ω_1, ω_3, γ, s_0, a, à vérifier les conditions (11), (12), (14), (15), avec en outre les inégalités, évidentes par ailleurs,

$$|\alpha - \delta| < \pi, \qquad \alpha - \delta > 0, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \gamma < \frac{2\omega_3}{i}, \qquad a > 0, \qquad 0 < s_0 < \pi.$$

Enfin, à ces conditions, il restera à adjoindre celle qui exprime que les points A, D, C sont en ligne droite. Il serait facile, mais inutile, comme on le verra un peu plus loin, d'expliciter analytiquement cette dernière condition.

Au lieu de nous donner les longueurs des lames AB et AC, nous nous donnerons les demi-périodes ω_1, ω_3 : la discussion terminée, les longueurs AB, AC seront déterminées *a posteriori*, par des calculs d'intégrales définies à éléments essentiellement positifs, sans autre difficulté que de calcul purement numérique.

Nous porterons donc l'attention sur les paramètres γ, s_0, a ; posons pour abréger

$$\frac{\omega_1}{\pi} s_0 = u, \qquad \frac{a}{2\omega_1} = v ;$$

l'égalité (11) et les inégalités (14), (15) deviennent

$$(17) \qquad v = \frac{i}{2\omega_3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}u - 2\alpha - \pi\right);$$

$$-\zeta_2 u + \frac{\eta_1}{\omega_1}u < v < -\zeta_1 u + \frac{\eta_1}{\omega_1}u.$$

Ces deux dernières inégalités signifient que le point u, v doit se trouver, dans le plan uOv, entre les deux courbes qu'indique la figure 31, et qui sont faciles à tracer ; ces deux courbes n'ont pas d'autre point commun que le point O, pour $O < u < \omega_1$, car

$$\zeta_2 u - \zeta_1 u = \frac{1}{2}\frac{(e_2 - e_1)p'u}{(pu - e_1)(pu - e_2)} > 0.$$

Cela étant, au lieu de nous donner α et δ, essayons de choisir convenablement u et v de façon à satisfaire à toutes les conditions, spécialement à celle concernant l'alignement des trois points ADC ; nous déterminerons après coup des valeurs acceptables pour α et δ. A cet effet, choisissons le point M(u, v) avec une abscisse entre O et ω_1, et plaçons ce point tout d'abord entre M_1 et M_2. L'égalité (17) exige alors que la droite menée par M avec une pente égale à $\frac{i\pi}{\omega_1\omega_3}$ aille couper l'axe Ov en un point d'ordonnée

négative, égale à $\frac{i}{2\omega_3}(2x - \pi)$. Or, la pente $\frac{i\pi}{2\omega_1\omega_3}$ est intermédiaire entre celles des tangentes en O aux deux courbes (M_1) et

Fig. 11.

(M_2) : ces dernières pentes sont, en effet, égales à $e_1 - \frac{\eta_1}{\omega_1}$ et $e_2 + \frac{\eta_1}{\omega_1}$, et l'affirmation ci-dessus se traduit par les inégalités

$$e_1 + \frac{\eta_1}{\omega_1} > \frac{i\pi}{2\omega_1\omega_3} > e_2 + \frac{\eta_1}{\omega_1}.$$

La relation connue $\frac{i\pi}{2} = \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1$ transforme ces inégalités en

$$e_1 - \frac{\eta_3}{\omega_3} > 0 > e_2 - \frac{\eta_3}{\omega_3},$$

ce qui, en repassant aux demi-périodes $\omega'_1\,\omega'_3$, devient

$$\eta_1 + \omega_1 e_3 < 0, \qquad \eta'_1 - \omega_1 e_3 > 0,$$

inégalités exactes en vertu de (16) et de la relation (T. et M., XXX, 3)

$$\eta'_1 + \omega'_1 e'_3 = -\frac{\pi^2}{2\omega'_1}\sum_1^{\infty}\frac{4q'^{2n-1}}{(1-q'^{2n-1})^2}.$$

Par le point O menons donc une droite OM_3 de pente $\frac{i\pi}{2\omega_1\omega_3}$; elle ira rencontrer M_1M_2 en un point M_3 et le point M devra nécessairement être placé sur le segment M_2M_3.

Imaginons alors que le point M décrive, d'un tracé continu, ce

segment $M_2 M_3$, toutes choses restant égales d'ailleurs : la configuration correspondante du plan z variera aussi d'une façon continue, ainsi qu'il est facile de s'en assurer ; voyons l'aspect de la ligne λ correspondant aux deux positions limites. Si nous plaçons M en

Fig. 32.

M_3, la disposition correspondante sera telle que l'on ait $2\alpha - \pi = 0$, et comme l'angle des deux lames OB et DC est égal à 2α, cela veut dire qu'on aura la disposition (I). Si nous plaçons,

Fig. 33.

au contraire, M en M_2, l'inégalité (14) se changera en une égalité, θ le long de λ variera toujours dans le même sens, le point d'inflexion aura disparu et l'on aura la disposition (II).

Donc, entre ces deux configurations, il y aura une configuration intermédiaire pour laquelle le prolongement de la lame DC ira passer par le point A. La valeur de $\mathfrak{v}$ correspondante sera, théoriquement au moins, facile à calculer avec l'approximation que l'on voudra : l'existence de cette valeur est en tout cas manifeste, ce qui, pour l'instant, est le point essentiel. La position de M sur $M_2 M_3$ étant ainsi fixée, la parallèle Δ par ce point à OM_3 déterminera sur l'axe $O\mathfrak{v}$ un point d'ordonnée négative, qui fournira la valeur de α correspondante ; cette valeur de α est, en effet, inférieure à $\frac{\pi}{2}$, elle est d'autre part positive ; en effet, les valeurs de α correspondant aux divers points de $M_2 M_3$ vont en diminuant

lorsque M va de M_3 en M_2 ; or, la parallèle à Δ par M_2 est au-dessus de la parallèle à Δ menée par le point $(\omega_1, 0)$, et à cette dernière, dont l'ordonnée à l'origine est $\frac{i\pi}{2\omega_3}$, il correspond une valeur nulle pour α ; donc α est positif pour la droite qui nous occupe.

α étant ainsi défini, il reste à calculer δ, ou γ. Nous nous donnerons γ entre O et $\frac{2\omega_3}{i}$, et nous en déduirons δ par la formule (12), qui est la seule où ces deux nombres figurent explicitement dans nos conditions. Or, il est facile de vérifier que l'expression

$$i \log \frac{\sigma\left(\omega_3 - \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} - \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} s_0 - a\right)\left(\frac{\omega_3}{i\omega_1} - \frac{\gamma}{2\omega_1}\right),$$

considérée comme fonction de γ, décroît, quand γ varie entre O et $\frac{2\omega_3}{i}$, depuis $2\alpha - \pi$ jusqu'à $-\pi$, en sorte que l'égalité (12) donnera toujours pour δ une valeur telle que

$$-\pi < \alpha + \delta - \pi < 2\alpha - \pi,$$

c'est-à-dire

$$-\alpha < \delta < \alpha;$$

ce sont justement les inégalités auxquelles nous avions astreint δ au début.

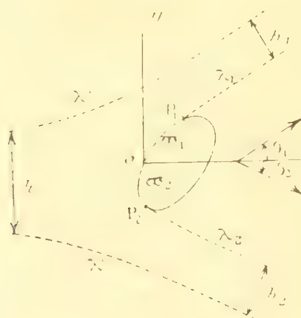
La question se trouve donc entièrement résolue, d'une manière à la vérité indirecte. On trouvera plus de détails dans mon Mémoire des *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (1915).

CHAPITRE VI.

COURANT DE LARGEUR FINIE RENCONTRANT UN OBSTACLE.

Nous nous plaçons toujours dans le cas d'un mouvement à deux dimensions, permanent et irrotationnel. Dans ce qui précède, nous avons supposé le solide placé dans un fluide illimité dans tous les sens. S'il n'en est pas ainsi, le problème se complique beaucoup. Le cas le plus simple, que nous traiterons d'abord avec M. U. Cisotti (*Atti dei Lincei*, 1910), est celui où il s'agit d'nu courant, animé d'une vitesse que nous supposerons horizontale et égale à 1 aux grandes distances, en amont, et limité latéralement par deux lignes de flux le long desquelles le courant glisse contre du fluide au repos. Ce jet fluide rencontre un obstacle solide, autour duquel il se divise en suivant deux portions OP_1 et OP_2 du profil; derrière le solide se formera une région de fluide en repos, limitée par deux lignes de courant λ_1 et λ_2, qui partent à l'infini sous des

Fig. 34.



angles θ_1 et θ_2 (*fig.* 34). Cette configuration correspond à peu près à ce qu'on peut observer au voisinage d'une pile de pont.

Ce problème se met en équations par les mêmes procédés que notre problème primitif. L'équation des pressions

$$p = p_0 + \frac{1}{2}(1 - V^2)$$

nous assurera que la vitesse est égale à 1 le long des lignes λ_1,

$\lambda_2, \lambda', \lambda''$, nous appellerons toujours φ et ψ le potentiel et la fonction de courant, nuls en O. On aura

$$\psi = 0 \quad \text{sur } \varpi_1, \varpi_2, \lambda_1, \lambda_2,$$
$$\psi = h_1 \quad \text{sur } \lambda', \qquad \psi = -h_2 \quad \text{sur } \lambda'',$$

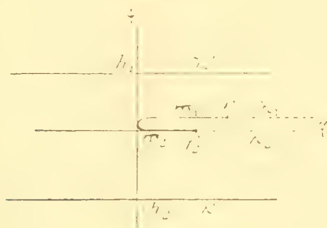
en désignant par h, h_1, h_2 les largeurs asymptotiques des différents jets ; et l'on aura

$$h = h_1 + h_2,$$

puisque, dans le mouvement permanent, le débit doit être le même à l'amont et à l'aval.

Dans le plan $f = \varphi + i\psi$, le fluide mobile sera représenté sur

Fig. 35.



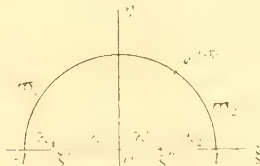
le domaine de la figure ci-jointe (*fig.* 35) : nous passerons de ce domaine à l'aire d'un demi-plan par la relation

$$e^{-(f-\varphi)} = (1 - F)^{\frac{h_1}{\pi}}(1 + F)^{\frac{h_2}{\pi}},$$

où l'on a posé

$$e\varphi = (1 - F_0)^{\frac{h_1}{\pi}}(1 + F_0)^{\frac{h_2}{\pi}}, \qquad F_0 = \frac{h_2 - h_1}{h}.$$

Fig. 36.



Puis la relation

$$\frac{F - \frac{1}{2}(F_1 + F_2)}{\frac{1}{2}(F_1 - F_2)} = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

nous donnera dans le plan ζ la représentation sur un demi-cercle :

les divers éléments de la figure sont définis par les relations

$$\cos\sigma_0 = \frac{F_1 - F_2 - 2F_0}{F_1 - F_2}, \qquad \frac{2 - F_1 - F_2}{F_1 - F_2} = -\frac{1}{2}\left(\zeta' - \frac{1}{\zeta'}\right),$$
$$\frac{2 + F_1 + F_2}{F_1 - F_2} = \frac{1}{2}\left(\zeta'' + \frac{1}{\zeta''}\right).$$

On termine alors, exactement comme dans le Chapitre IV, la construction de la fonction $\omega(\zeta)$, définie par la donnée de sa partie réelle sur la frontière $|\zeta| = 1$, étant obtenue par la même formule que ci-dessus. Nous n'expliciterons pas ici tous les résultats.

Calcul de la pression sur le solide. — Considérons le champ du plan z délimité par les lignes de courant ϖ et λ et par les sections droites h, h_1, h_2, φ étant naturellement le potentiel des vitesses dans ce champ.

Appliquons à ce champ le théorème d'Euler rappelé au Chapitre I et qu'on peut évidemment énoncer, dans le présent exemple, de la façon suivante : toutes les pressions agissant sur le tube fluide délimité par h, h_1, h_2 sont équivalentes à trois forces MV, M_1V_1, M_2V_2 appliquées aux cloisons extrêmes h, h_1, h_2 et dirigées vers l'extérieur du tube; V, V_1, V_2 sont les vitesses sur ces cloisons et M, M_1, M_2 représentent les quantités de fluide qui traversent ces cloisons pendant l'unité de temps. Or, il résulte des considérations les plus élémentaires que l'on ne change pas la valeur de R en supposant p_0 nulle, en sorte que dans cette hypothèse la pression totale sur le tube se réduit à la pression totale R exercée sur le solide, changée de signe. Maintenant on a

$$V = V_1 = V_2 = 1, \qquad M = h, \qquad M_1 = h_1, \qquad M_2 = h_2,$$

et les vitesses V, V_1, V_2 font avec Ox les angles 0, θ_1, θ_2 : les composantes des trois forces MV, M_1V_1, M_2V_2 ci-dessus, sur les deux axes, sont donc

$$h - h_1\cos\theta_1 - h_2\cos\theta_2, \qquad -h_1\sin\theta_1 - h_2\sin\theta_2,$$

ce qui donne la formule

$$R = R_x + iR_y = h - h_1 e^{i\theta_1} - h_2 e^{i\theta_2}.$$

Dans le cas symétrique $\left(\theta_1 = -\theta_2 = \alpha,\ h_1 = h_2 = \frac{h}{2}\right)$, se réduit à

$$R_x = 2h\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Le jet principal étant donné ainsi que le solide qui lui est opposé, la direction des jets dérivés à l'arrière n'est pas quelconque et se trouve déterminée par l'orientation du solide et par

la grandeur relative de celui-ci par rapport à l'épaisseur du jet. C'est ce que montre bien clairement l'exemple simple suivant :

Supposons le mouvement symétrique par rapport à Ox et le solide constitué par une lame rectiligne normale au courant ; alors on prendra

$$F_0 = 0, \qquad \sigma_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad F_2 = -F_1,$$

$$\frac{1}{F_1} = \frac{1}{2}\left(\zeta'' - \frac{1}{\zeta''}\right), \qquad \zeta' = -\zeta''.$$

et la fonction $\omega(\zeta)$ devra avoir sa partie réelle égale à $\frac{\pi}{2}$ sur les deux quarts de circonférence dans les deux premiers quadrants. L'application de la formule (9) du Chapitre IV donne

$$\omega(\zeta) = i \log \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} = \theta + i\tau.$$

Pour $\zeta = e^{is}$, ceci nous fournit

$$\tau = \log \left| \frac{\cos s}{1 - \sin s} \right|.$$

La valeur de θ pour $\zeta = \zeta''$ devant être égale à $-\alpha$, nous avons

$$i \log \frac{1 + i\zeta''}{1 - i\zeta''} = -\alpha;$$

donc

$$\zeta'' = \operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}, \qquad F_1 = \sin \alpha.$$

Ceci posé, la transformation génerale ci-dessus devient

$$e^{-f} = (1 - F^2)^{\frac{h}{2\pi}}, \qquad F = Z \sin\alpha, \qquad Z = -\frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right).$$

Calculons la longueur de la lame : on a, pour $\zeta = e^{is}$,

$$df = \frac{h}{\pi} \frac{\sin s \cos s \, ds}{\cos^2 s - \frac{1}{\sin^2 \alpha}}$$

et

$$|dz| = e^{-\tau} |df|.$$

On en conclut la longueur de la lame :

$$l = \frac{2h}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin s) \sin s \, ds}{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 s},$$

ce qu'un calcul élémentaire met sous la forme

$$l = 2h \sin^2 \frac{\alpha}{2} \left[1 - \frac{2}{\pi} \cot \frac{\alpha}{2} \log \operatorname{tang} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

α est donc déterminé quand on se donne le rapport $\frac{l}{h}$ entre la longueur de la lame et la largeur de la veine fluide.

La résistance de pression totale éprouvée par la lame étant réduite à $R = 2h \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, on a

$$(1) \qquad \frac{R}{l} = \frac{\pi}{\pi - 2 \cot \frac{\alpha}{2} \log \operatorname{tang} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}.$$

Il est facile de s'assurer que cette quantité est inférieure à $\frac{\pi}{4 + \pi}$, valeur qui correspond au cas d'un courant fluide de largeur infinie.

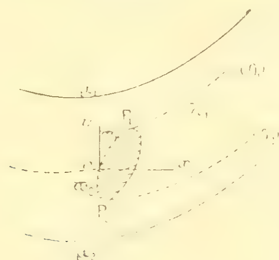
Si l'on revient au cas général pour un solide quelconque, la solution obtenue au moyen de la fonction $\omega(\zeta)$ appropriée est soumise aux mêmes restrictions qu'on a expliquées au Chapitre précédent, concernant la validité des configurations obtenues. Tout ce qui a été dit à ce propos peut être transporté ici sans modifications essentielles : les calculs et les résultats sont entièrement semblables à ceux qui ont été décrits plus haut.

CHAPITRE VII.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE DANS UN CANAL.

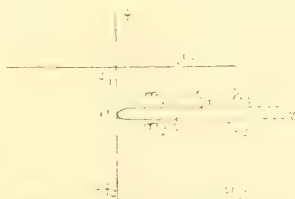
Nous traiterons d'abord le cas général où les parois du canal et le profil de l'obstacle sont quelconques (*cf.* H. Villat, *Annales de l'École Normale*, 1912). Pour simplifier, nous supposons toujours, comme ci-dessus, les unités choisies de façon que la vitesse, constante sur les lignes de glissement λ_1 et λ_2 à

Fig. 37.



l'arrière du solide, y soit égale à 1, et nous prendrons $f = \varphi + i\psi$, nul au point O où le courant se bifurque à l'avant du solide;

Fig. 38.



nous appellerons θ, θ_1, θ_2 les directions asymptotiques du courant le long du canal en amont et en aval du solide.

Au domaine du plan z occupé par le fluide en mouvement par rapport au corps, correspondra dans le plan f le champ indiqué par la figure; ψ_1 et ψ_2 sont les largeurs asymptotiques des deux portions de courant à l'arrière. Du champ f nous passerons à un

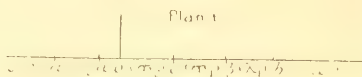
demi-plan par la transformation

$$f = -A\log(t-a) - B\log(t-b) + D + iD'$$

(A, B, D, D′ : constantes réelles),

dans laquelle a et b sont deux constantes qu'on pourrait choisir arbitrairement, mais que, pour plus de commodité, nous laisserons provisoirement quelconques ; nous prenons les détermina-

Fig. 39.



tions des logarithmes qui sont réelles pour t réel et supérieur à a ou b respectivement. Alors nous voyons immédiatement que la transformation fera correspondre les domaines des plans f et t, si nous posons

$$A = \frac{\psi_2}{\pi}, \qquad B = \frac{\psi_1}{\pi}, \qquad D_1 = \psi_1.$$

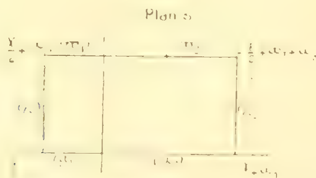
Il faudra en outre que le minimum de f, quand t varie entre a et b, soit $f = 0$, ce minimum correspond à $t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}$; on choisira donc D de façon que

$$D = A\log(t_0 - a) + B\log(b - t_0).$$

Du demi-plan t, nous passerons à l'aire d'un rectangle au moyen de la relation

$$ds = \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(t-\alpha)(t-\beta)(t-b)}}.$$

Fig. 40.



L'inversion de cette formule se réalise par le procédé classique (*cf.* Appell et Lacour, p. 256) si l'on pose

$$t = \frac{a+b+\alpha+\beta}{4} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' s - \wp'\gamma}{\wp s - \wp\gamma},$$

l'argument γ étant réel, ainsi que les deux nombres ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$, en désignant par $2\omega_1$ et $2\omega_3$ les deux périodes; le radical $\sqrt{(t-a)(t-\alpha)(t-\beta)(t-b)}$ est alors égal à $ps - p(s+\gamma)$ et ses zéros correspondent aux valeurs suivantes de s :

$$-\frac{\gamma}{2}+\omega_1, \quad -\frac{\gamma}{2}+\omega_1+\omega_3, \quad -\frac{\gamma}{2}+\omega_3, \quad -\frac{\gamma}{2}$$

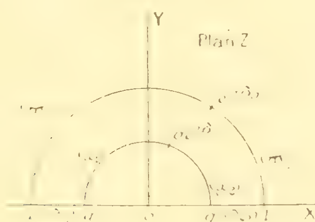
(relatifs à a, α, β, b, respectivement); la séparation entre φ_1 et φ_2 a lieu pour $s = 0$.

Posant enfin

$$s = \omega_1 + \omega_3 - \frac{\gamma}{2} - \frac{\omega_1}{i\pi}\log Z,$$

on passe dans le plan Z à une demi couronne de rayons 1 et $q\left(= e^{-\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}} < 1\right)$ dans les conditions indiquées par la figure. Le

Fig. 41.



point $Z = e^{i\delta_0}$ correspond à $f = 0$, le point $Z = qe^{i\delta_1}$ à $s = 0$, c'est-à-dire qu'on a

$$\delta_1 = \frac{\pi}{\omega_1}\left(\omega_1 - \frac{\gamma}{2}\right).$$

Dans la figure initiale du plan f, il y avait quatre paramètres ψ_1, ψ_2, φ_1, φ_2; finalement, nous garderons les paramètres ω_1, ω_3, γ, ψ_1, ψ_2 : alors δ_0 est défini au moyen de la relation $f = 0$; le paramètre supplémentaire qui s'est introduit n'est qu'un paramètre d'homogénéité par lequel on peut multiplier ω_1 et ω_3 sans rien changer d'essentiel. Au reste, la figure du plan Z ne comporte plus, outre ψ_1 et ψ_2, que le rapport $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ (par l'intermédiaire de q), δ_0 et δ_1; on peut donc aussi garder comme arbitraires $\frac{\omega_1}{\omega_3}$, δ_0, δ_1 et l'un des deux nombres ψ_1, ψ_2, ceux-ci étant liés par la relation $t_0 = \frac{a\psi_1 + b\psi_2}{\psi_1 + \psi_2}$, si t_0 est la valeur de t qui correspond à $Z = e^{i\delta_0}$.

Des relations établies ci-dessus, nous tirerons pour les différentielles

$$df = -\frac{\psi_1 - \psi_2}{\pi} \frac{t - t_0}{(t-a)(t-b)} dt,$$

puis

$$dt = [p s - p(s + \omega_3)] ds$$

$$= \frac{\omega_1}{i\pi} \frac{dZ}{Z} \frac{p' \frac{\omega_3}{2} p'\left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right)}{\left[p\left(\omega_1 + \omega_3 - \frac{\omega_1}{i\pi} \log Z\right) - p \frac{\omega_3}{2}\right]^2}.$$

Cela étant, si nous posons, comme antérieurement,

$$w = u - iv = \frac{df}{dz} = e^{-i\Omega} = e^{-i\Theta + T},$$

la fonction Ω deviendra une fonction de Z, régulière dans la demi-couronne, et prenant des valeurs réelles sur les deux frontières placées sur OX. On peut donc prolonger cette fonction $\Omega(Z)$ dans la demi-couronne symétrique par rapport à OX. On pourra alors définir cette fonction par les valeurs de sa partie réelle sur les frontières. La succession des valeurs de Θ le long de ces frontières est liée d'une façon évidente à la forme des parois solides ϖ_1 et ϖ_2 pour ce qui concerne $|Z| = 1$, μ_1, μ_2 pour $|Z| = q$.

Comme dans le problème du fluide indéfini, tous les éléments cinématiques et géométriques du mouvement se déduiront simplement des équations qu'on vient d'écrire. Nous donnerons ici simplement le résultat principal, relatif à la pression exercée par le fluide sur l'ensemble des parois ϖ et μ.

Il n'y a qu'à reprendre le raisonnement du précédent Chapitre, en considérant le domaine $(\mathcal{D})$ délimité par le canal, le solide et son sillage, et par trois sections normales S, S_1, S_2, suffisamment éloignées du solide de part et d'autre.

Le théorème d'Euler nous apprend que l'ensemble des pressions

Fig. 40.



qui s'exercent sur tout le contour du domaine $\mathcal{D}$ est équivalent à trois forces MV appliquées aux trois sections limites ; à savoir :

$(SV_0)V_0 = SV_0^2$ appliquée normalement à S (V_0 = la vitesse à l'infini en amont); $S_1 V_1^2 = S_1$ (puisque la vitesse est égale à 1 à l'infini en aval) normale à S_1, S_2 normale à S_2. On a du reste

$$S_1 = \psi_1, \qquad S_2 = \psi_2, \qquad SV_0 = \psi_1 + \psi_2.$$

Nous savons que dans ce calcul on peut supposer nulle la pression p_0 dans le sillage, en sorte qu'il reste simplement, sur le contour du domaine (ω), les seules pressions sur S, $\varpi_1 \varpi_2$, $\mu_1 \mu_2$; mais elles sont dirigées vers l'intérieur du domaine (ω); par suite, nous aurons la pression totale exercée par le fluide sur les parois et sur S, en changeant le sens des trois forces énumérées ci-dessus, et projetant sur les deux axes. La pression sur la cloison S est donnée par la relation

$$p = \frac{1}{2}(1 - V_0^2),$$

et d'autre part on aura $SV_0 = S_1 + S_2$, puisque le débit de fluide doit être le même en amont et en aval, le régime étant permanent. Il viendra donc, en désignant par R_x et R_y les composantes de la pression totale,

$$R_x - pS = SV_0^2 - S_1 \cos\theta_1 - S_2 \cos\theta_2,$$

$$R_y = - S_1 \sin\theta_1 - S_2 \sin\theta_2,$$

$$R_x - iR_y = \frac{S}{2}\left[1 - \left(\frac{S_1 + S_2}{S}\right)^2\right] - S_1 e^{i\theta_1} - S_2 e^{i\theta_2}.$$

Un cas particulièrement important est celui où le canal est à bords rectilignes parallèles à Ox; alors $\theta_1 = \theta_2 = 0$, et R_x provient entièrement des parois ϖ_1, ϖ_2 et nullement de μ_1, μ_2; R_x devient exactement la résistance opposée par l'obstacle dans le sens du courant; elle est, en ce cas, égale à

$$(19) \qquad R_x = \frac{(S - S_1 - S_2)^2}{2S} = \frac{\Delta^2}{2S};$$

S désigne la largeur du canal et Δ la largeur du sillage à l'infini. Ce très élégant résultat constitue un théorème dû à M. U. Cisotti (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1909).

Remarquons que, toujours dans ce cas particulier, on a $R_y = 0$, ce qui veut dire que la pression totale exercée sur le solide normalement au courant est précisément opposée à celle que supportent les parois du canal.

La démonstration précédente, relative au cas général, s'applique pour ainsi dire sans aucune modification si l'on suppose qu'il s'agisse d'un mouvement *à trois dimensions* dans un canal tubulaire contenant un solide.

Reste maintenant à construire la fonction $\Omega(Z)$. Il suffit pour cela de se donner, selon la forme des parois $\varpi_1 \varpi_2$ et $\mu_1 \mu_2$, les valeurs de Θ, c'est-à-dire de l'inclinaison du courant le long des

parois. Appliquant ensuite la formule générale du Chapitre II, il vient

$$\Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Phi(\varepsilon)\,\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon$$

$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\Psi(\varepsilon)\,\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)d\varepsilon,$$

avec l'hypothèse

$$\Phi(2\pi - \varepsilon) = -\Phi(\varepsilon),$$

$$\Psi(2\pi - \varepsilon) = -\Psi(\varepsilon).$$

On peut donc réduire cette formule à

$$\Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\Phi(\varepsilon)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon$$

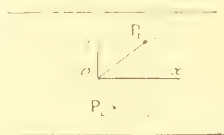
$$-\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\Psi(\varepsilon)\left[\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right) + \zeta_3\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)\right]d\varepsilon,$$

et la condition de régularité se réduit elle-même à

$$\int_0^{\pi}[\Phi(\varepsilon) - \Psi(\varepsilon)]\,d\varepsilon = 0.$$

Par exemple, l'obstacle formé de deux lames rectilignes OP_1, OP_2 faisant avec la direction du canal, à bords rectilignes, des

Fig. 45.



angles donnés $\alpha + \delta$ et $-\alpha + \delta$ (en supposant que le point mort soit en O), correspondra à la fonction particulière

$$\Omega_0(Z) = \frac{2\alpha i}{\pi}\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}\varepsilon\right)} + \frac{4\alpha\eta_1\omega_1\varepsilon}{\pi^2}\log Z + \frac{2\alpha\varepsilon}{\pi},$$

avec la condition

$$\pi\delta - \alpha(\pi - 2\varepsilon) = 0.$$

Le cas le plus intéressant correspond à $\delta = 0$, $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$, auquel cas il est facile de constater que $OP_1 = OP_2$ et que le mouvement est symétrique par rapport à Ox. On pourrait, particulièrement dans ce cas, calculer la largeur du canal et celle du sillage et en

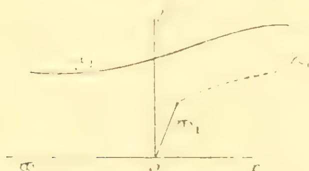
déduire la résistance ; mais nous éviterons ce calcul, qui se trouvera effectué plus commodément un peu plus loin.

Mouvements symétriques. — Les calculs ci-dessus s'appliquent immédiatement dans l'hypothèse de la symétrie par rapport à Ox, en faisant

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \qquad \alpha = \beta = 0, \qquad c = 0, \qquad c_0 = \delta_1 = \frac{\pi}{2},$$

$$a = b = 0, \qquad A = B, \qquad \eta = \omega_1.$$

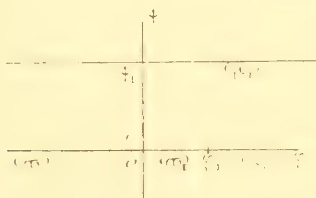
Fig. 44.



Mais il est plus simple d'opérer directement, de la façon suivante :

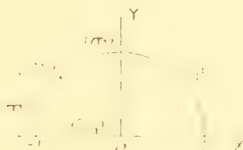
Prenons en considération seulement la moitié du domaine

Fig. 45.



occupé par le fluide, en assimilant à une paroi solide la portion ϖ de l'axe Ox ; on aura alors les représentations qu'indiquent les

Fig. 46.



figures et l'on passera du domaine du plan f à un demi-cercle par les transformations suivantes :

On posera

$$f = A - \frac{\psi_1}{\pi} \log \frac{1 + Z^2}{1 - Z^2},$$

avec

$$\varphi_1 = A + \frac{\psi_1}{\pi}\log 2,$$

$$0 = A + \frac{\psi_1}{\pi}\log\left(\frac{1-\cos s_0}{1+\cos s_0}\right) \qquad \left(\frac{\pi}{2} < s_0 < \pi\right).$$

Ceci permet de tirer A et ψ_1 en fonction de s_0 et de φ_1, qu'on gardera comme paramètres.

On aura immédiatement df et, par suite, pour remonter au plan z,

$$dz = \frac{2\psi_1}{\pi}e^{i\Omega}\frac{1+Z}{(1-Z)(1+Z^2)}dZ.$$

Quant à $\Omega(Z)$, sa construction résultera de la formule (9) du Chapitre IV ; comme les valeurs $g(s)$ et $h(s)$ que prend Θ sur μ_1 et sur ϖ_1 sont des conséquences des données géométriques, on aura

$$\Omega(Z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(s)\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos s+Z^2}ds$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{\pi} h(s)\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos s+Z^2}ds.$$

Pour le canal à bords rectilignes, il suffira de faire $g(s) = 0$.

La validité de la solution s'étudiera par les mêmes procédés qu'au Chapitre IV. Notamment l'obstacle sera une proue si $\frac{d\Omega}{dZ}$ s'annule pour $Z = -1$. Or, les calculs de la page 43 nous donnent, pour le point $Z = \rho e^{is}$, moyennant des transformations faciles,

$$\left(\frac{d\Omega}{d\rho}\right)_{\rho=1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\Phi'(\sigma)-\Phi'(s)]\cot\frac{s-\sigma}{2}d\sigma$$
$$-\frac{\Phi(s_0-0)-\Phi(s_0+0)}{2\pi}\cot\frac{s-s_0}{2}$$
$$-\frac{\Phi(s_1-0)-\Phi(s_1+0)}{2\pi}\cot\frac{s-s_1}{2}.$$

avec $s_1 = 2\pi - s_0$ et $\Phi(\sigma) = g(\sigma)$ ou $h(\sigma)$ selon les intervalles.

Plaçons-nous dans le cas du canal rectiligne, alors $g(s) \equiv 0$ et l'on a, α étant l'angle du courant avec Ox au point de départ,

$$\Phi(s_0-0) = \Phi(s_1+0) = 0,$$
$$\Phi(s_0+0) = \Phi(s_1-0) = \alpha.$$

Il vient par suite

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_{Z=-1} = \frac{1}{\pi}\int_{s_0}^{2\pi-s_0} h(\sigma)\tan\frac{\sigma}{2}d\sigma - \frac{\alpha}{2\pi}\tan\frac{s_1}{2} - \frac{\alpha}{2\pi}\cot\frac{s_0}{2},$$

mais, par définition,

$$h(\pi) = \ldots h(\ldots), \qquad h(\ldots\pi) \ldots \qquad h(\ldots),$$

d'où enfin

$$\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)_{Z=1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h'(\xi)\,\mathrm{tang}\,\frac{\xi}{2}\,d\xi - \frac{\alpha}{\pi}\,\frac{\cos s_0}{\sin s_0}.$$

On aura donc affaire à une proue si l'on a la condition

$$\int_0^{\pi} h(\xi)\,\mathrm{tang}\,\frac{\xi}{2}\,d\xi - \frac{\alpha}{2}\cot s_0 = 0.$$

Restons toujours dans le cas du canal rectiligne, et supposons la paroi ϖ_1 rectiligne et faisant l'angle α avec Ox : naturellement l'obstacle correspondant ne sera pas une proue. Achevons, dans ce cas simple, le calcul de la résistance. On a ici

$$\Omega(Z) = \frac{\alpha}{\pi}\int_{s_0}^{\pi}\frac{1-Z^2}{1-2Z\cos s+Z^2}\,ds = \frac{\alpha}{2} - \frac{i\alpha}{\pi}\log\left(i\frac{Z-e^{is_0}}{1-Ze^{is_0}}\right),$$

la détermination du logarithme étant celle qui se réduit à $-\frac{i\pi}{2} - is_0$ pour $Z = 0$.

La vitesse V_∞ à l'amont est fournie par la partie imaginaire de $\Omega(i)$; cette partie imaginaire est $i\mathrm{T}_1$, avec

$$\mathrm{T}_1 = \frac{\alpha}{\pi}\log\,\mathrm{tang}\left(\frac{s_0}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

et l'on a

$$V_\infty = e^{\mathrm{T}_1} = \left[\mathrm{tang}\left(\frac{s_0}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]^{\frac{\alpha}{\pi}},$$

et si D est la demi-largeur du canal, on a $V_\infty D = \psi_1$; la demi-largeur du sillage est, d'autre part, $D - \psi_1$; donc la résistance directe est, d'après le théorème général démontré plus haut,

$$R = \frac{(D-\psi_1)^2}{D} = \frac{\psi_1}{V_\infty}(1-V_\infty)^2.$$

Rapportons cette résistance à l'envergure de la lame, laquelle est $\Delta = 2\varpi\sin\alpha$, ϖ désignant la longueur de ϖ_1. C'est le rapport $\frac{R}{\Delta}$ qu'il importe de connaître. Calculons donc ϖ_1 : on a sur cette paroi $Z = e^{is}$ ($s_0 < s < \pi$). Dans $\Omega(e^{is})$, le coefficient de i se

calcule aisément, il est

$$T = \frac{\alpha}{\pi} \log \frac{\sin \frac{s - s_0}{2}}{\sin \frac{s + s_0}{2}};$$

donc

$$e^{-T} = \left(\frac{\sin \frac{s + s_0}{2}}{\sin \frac{s - s_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}},$$

et l'on a

$$dz = \frac{2\psi_1}{\pi} \left(\frac{\sin \frac{s + s_0}{2}}{\sin \frac{s - s_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{1 + e^{is}}{(1 - e^{is})(1 + e^{2is})} e^{is} i\, ds,$$

et par suite

$$\varpi_1 = -\frac{\psi_1}{\pi} \int_{s_0}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{s + s_0}{2}}{\sin \frac{s - s_0}{2}} \right)^{\frac{\alpha}{\pi}} \cot \frac{s}{2} \frac{ds}{\cos s}.$$

Nous poserons $\pi - s = \gamma$, $\pi - s_0 = \gamma_0$, puis

$$t = \frac{\tan\frac{\gamma_0}{2} - \tan\frac{\gamma}{2}}{\tan\frac{\gamma}{2} + \tan\frac{\gamma_0}{2}}, \qquad \tau_0 = \frac{1 - \tan\frac{\gamma_0}{2}}{1 + \tan\frac{\gamma_0}{2}} \; (< 1);$$

alors des calculs tout élémentaires donneront

$$\varpi_1 = \frac{\psi_1}{\pi} \int_0^1 \left[-2 \frac{t^{\frac{\alpha}{\pi}}}{t - 1} + \frac{t^{\frac{\alpha}{\pi}}}{t + \frac{1}{\tau_0}} + \frac{t^{\frac{\alpha}{\pi}}}{t + \tau_0} \right] dt.$$

Introduisons la fonction

$$F(x, \xi) = \int_0^1 \frac{\xi t^{x-1}\, dt}{\xi t - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{x(x+1)\dots(x+n)} \left(\frac{\xi}{\xi - 1} \right)^{n+1}$$

(*cf.* NIELSEN, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, p. 264). Pour $\xi = -1$, $-\tau_0$ ou $-\frac{1}{\tau_0}$, on a les trois fonctions

particulières

$$\beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{t+1}\,dt = \sum_0^\infty \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\,\frac{1}{2^{n+1}}$$

(fonction de Stirling).

$$f_1(x) = \int_0^1 \frac{\tau_0 t^{x-1}\,dt}{\tau_0 t+1}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\left(\frac{1-\operatorname{tang}\frac{\gamma_0}{2}}{2}\right)^{n+1},$$

$$f_2(x) = \int_0^1 \frac{\frac{1}{\tau_0}t^{x-1}\,dt}{\frac{1}{\tau_0}t+1}$$

$$= \sum_0^\infty \frac{n!}{x(x+1)\ldots(x+n)}\left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{\gamma_0}{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

Alors il vient

$$\varpi_1 = \frac{\psi_1}{\pi}\left[f_1\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right) + f_2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right) - 2\beta\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)\right];$$

d'où

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\pi(1-V_\infty)^2}{2V_\infty \sin\alpha}\,\frac{1}{\left[f_1\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)+f_2\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)-2\beta\left(1-\frac{\alpha}{\pi}\right)\right]}.$$

Il est alors facile de passer aux chiffres. Particularisons encore, en supposant $\alpha = \frac{\pi}{2}$; nos trois fonctions ci-dessus deviennent $\left(\text{par la transformation } t = \frac{1}{\theta^2}\right)$

$$\beta\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \frac{t^{-\frac{1}{2}}\,dt}{t+1} = 2\int_1^\infty \frac{d\theta}{1+\theta^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^\infty \frac{2\tau_0\,d\theta}{\tau_0+\theta^2} = 2\sqrt{\tau_0}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{\tau_0}}\right),$$

$$f_2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_1^\infty \frac{2\,d\theta}{\theta^2\tau_0+1} = \frac{2}{\sqrt{\tau_0}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\tau_0}\right).$$

de sorte que

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\pi(1-V_\infty)^2}{2V_\infty\left[\pi\left(\sqrt{\tau_0}+\frac{1}{\sqrt{\tau_0}}\right) - 2\sqrt{\tau_0}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{\tau_0}} - \frac{2}{\sqrt{\tau_0}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\tau_0} - \pi\right]}.$$

On a d'autre part

$$V_\infty = \left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma_0}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tau_0}.$$

d'où enfin

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\pi(1-\sqrt{\tau_0})^2}{2\sqrt{\tau_0}\left[\pi\left(\sqrt{\tau_0} + \frac{1}{\sqrt{\tau_0}} - 1\right) - 2\sqrt{\tau_0}\operatorname{arc\,tang}\frac{1}{\sqrt{\tau_0}} - \frac{2}{\sqrt{\tau_0}}\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\tau_0}\right]},$$

ce que l'on met aisément sous la forme

$$\frac{R}{\Delta} = \frac{\pi(1-\sqrt{\tau_0})}{2\left[\pi - 2(1+\sqrt{\tau_0})\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\tau_0}\right]} = \frac{\pi(1-V_\infty)}{2\left[\pi - 2(1+V_\infty)\operatorname{arc\,tang} V_\infty\right]}.$$

Supposons que nous fassions croître indéfiniment la largeur du canal, alors V_∞ tend vers 1, et par suite aussi τ_0 tend vers 1 ; l'expression précédente tend donc finalement vers $\frac{\pi}{4+\pi}$; on retrouve ainsi la valeur classique du cas du fluide indéfini.

On trouvera l'étude détaillée du cas symétrique dans U. Cisotti (*Circolo di Palermo*, 1909), H. Villat (*Bulletin de la Société mathématique*, 1912; *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1914).

CHAPITRE VIII.

FLUIDE LIMITÉ PAR UNE PAROI FIXE.

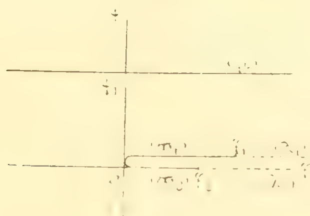
L'étude de ce nouveau problème est plus malaisée que celle des précédents, aucune considération de symétrie ne pouvant plus être mise en jeu pour simplifier la question. L'entrée en matière

Fig. 47.



se fera tout à fait comme plus haut. Avec les mêmes notations que ci-dessus, nous supposerons que la vitesse constante sur les

Fig. 48.

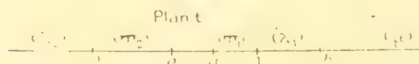


deux bords λ_1 et λ_2 du sillage à l'arrière du solide S placé dans le courant, soit égale à 1, et qu'elle soit horizontale à l'infini sur λ_1; d'ailleurs, le fluide est supposé limité par la paroi solide indéfinie μ. Nous ferons la supposition que $f(=\varphi - i\psi)$ est nul au point O. Dans le plan f, nous aurons alors la représentation de la figure 48.

De là nous passerons à un demi-plan t par la transformation

$$f = -At - A(b-a)\log(t-b)$$
$$- A(b-a)i\pi + Aa - A(b-a)\log(b-a).$$

Fig. 49.



($A > 0$, $|a| < 1$, $b > 1$, $\psi_1 = A(b-a)\pi$). Nous pourrions supposer que les points φ_1 et φ_2 correspondent à $t = \pm 1$.

Introduisons ensuite les fonctions elliptiques correspondant aux racines

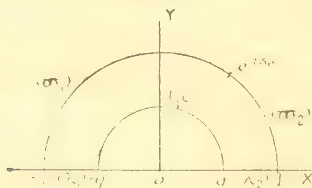
$$e_1 = \frac{2b}{3}, \qquad e_2 = 1 - \frac{b}{3}, \qquad e_3 = -1 - \frac{b}{3}$$

et posons

$$t = \frac{b}{3} + p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \omega_3\right).$$

On vérifiera (*cf.* ma *Thèse*, *Annales de l'École Normale*, 1911, 1re Partie) que, dans le plan Z, on a représenté le domaine

Fig. 50.



primitif sur la demi couronne que représente le dessin ; on a posé

$$q = e^{\frac{\pi\omega_3}{i\omega_1}}.$$

En désignant par e^{is_0} le point qui correspond à la séparation entre ϖ_1 et ϖ_2, c'est-à-dire à $t = a$, on a

$$a - \frac{b}{3} = p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \omega_3\right).$$

L'égalité

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\Omega}$$

permet alors de considérer $\Omega(Z)$ comme une fonction régulière de Z dans la demi-couronne ; cette fonction est réelle sur l'axe réel, et par suite prolongeable par symétrie : $\Omega(Z)$ sera donc

régulière dans toute la couronne et l'on aura, une fois cette fonction $\Omega(Z)$ déterminée par les conditions aux limites, l'équation

$$dz = e^{i\Omega(Z)}\,df,$$

qui permettra de revenir au plan z. Calculons donc df; il vient d'abord

$$(20)\qquad df = -\frac{A\omega_1}{i\pi}\,\frac{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \omega_3\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \omega_3\right)}{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \omega_3\right) - e_1}\;\wp'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \omega_3\right)\frac{dZ}{Z}$$

et, par des transformations usuelles,

$$df = -\frac{A\omega_1}{i\pi}(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2\,\frac{\left[\wp\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right)\right]\wp'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right)}{\left(\wp\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - e_3\right)\left[\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right) - e_2\right]\left[\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right) - e_3\right]^2}\,\frac{dZ}{Z}.$$

Les résultats du Chapitre II permettront, d'autre part, de construire la fonction $\Omega(Z)$, qui correspond à une configuration générale donnée, en introduisant les deux fonctions $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ qui traduisent les variations de l'angle que fait avec Ox la tangente aux diverses parois solides ϖ_1, ϖ_2 et μ, dans le sens du courant. On déduit ensuite de là tous les éléments géométriques du mouvement. Nous n'entrerons pas ici dans tous les détails.

Pour ce qui concerne la résistance éprouvée par le solide, on peut en ramener le calcul à celui d'intégrales définies; mais, dans le cas le plus intéressant, celui où la paroi μ est rectiligne, nous allons voir que la composante de la résistance parallèle au mur s'exprime en termes finis d'une façon extrêmement simple et élégante (*cf.* mon Mémoire des *Annales de l'École Normale supérieure*, 1919). En ce cas, la fonction $\Psi(s)$ est identiquement nulle, et la condition de régularité se réduit à

$$\int_0^\pi \Phi(s)\,ds = 0.$$

Quant à $\Omega(Z)$, il est fourni par la relation

$$\Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^\pi \Phi(s)\times\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right)\right]ds,$$

ce que l'on peut mettre sous une des deux formes suivantes :

$$\Omega(Z) = -\frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi} \Phi(s)\,\frac{p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right)}{p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}\,ds$$

ou

$$(22)\quad \Omega(Z) = \frac{i\omega_1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\Phi(s)\left[\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - \zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right)\right]ds.$$

Or, en reproduisant exactement le raisonnement qui nous a servi à la page 36 dans le cas du fluide indéfini dans tous les sens, nous trouverons que, si R_x et R_y sont les composantes de la pression totale sur ϖ_1, ϖ_2 suivant les directions Ox et Oy, on a

$$R = R_x + iR_y = \frac{1}{2i}\int_{|Z|=1,\ \text{sens direct}} e^{i\Omega}\,df.$$

En se reportant à l'expression de df, nous en tirerons R_x et R_y sous forme d'intégrales définies.

Remarquons maintenant que $\Omega(Z)$ est imaginaire pure sur la paroi rectiligne $\varphi(\Theta = 0)$. Il en résulte immédiatement que la fonction $i\Omega(Z)$ peut être prolongée analytiquement dans la couronne comprise entre les rayons q et q^2, en l'assujettissant à prendre des valeurs conjuguées aux points inverses géométriquement par rapport au centre dans le module q^2. Quant à la fonction $\frac{df}{dZ}$, elle se trouve d'elle-même définie, dans ce nouveau domaine, par son expression (20). Considérons alors l'intégrale suivante :

$$I = \int_{|Z|=1} e^{i\Omega}\frac{df}{dZ}\,dZ - \int_{|Z|=q^2} e^{i\Omega}\frac{df}{dZ}\,dZ.$$

Sur les deux circonférences en jeu, f est réel; aux points inverses, les valeurs de $\frac{df}{dZ}$ sont conjuguées; en outre, si

$$\Omega = \Theta + iT,$$

les valeurs de Θ sont opposées, et les valeurs de T sont les mêmes aux points des deux circonférences qui se correspondent par inversion. Il en résulte

$$I = 2i\int_{|Z|=1} e^{-T}\sin\Theta\,df.$$

et par suite, d'après l'expression de R,

$$I = 4 i R_x.$$

Mais, d'autre part, la fonction $e^{i\Omega}\dfrac{df}{dZ}$ est uniforme entre les circonférences de rayons 1 et q^2; elle possède dans ce domaine les seuls points singuliers $Z = q$, $Z = -q$; et la présence des points irréguliers e^{is_0} et $q^2 e^{is_0}$ sur les frontières n'introduit aucune difficulté, car on peut éviter ces points au moyen de petits arcs de cercle dont on fera tendre les rayons vers zéro, la contribution de ces petits arcs tendant elle-même vers zéro, comme il est aisé de s'en assurer. Alors, l'application du théorème de Cauchy va nous permettre de calculer R_x.

En effet, on aperçoit que, pour la fonction $e^{i\Omega}\dfrac{df}{dZ}$, le point

$$Z = q \qquad \left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \omega_3\right)$$

est un pôle triple, et, si l'on fait $Z = q + h$, on a

$$\frac{df}{dZ} = -\frac{2A\pi^2 q^2}{\omega_1^2 h^3}\,\frac{1 - \dfrac{h}{q} + \dfrac{1}{12}\dfrac{h^2}{q^2} - \dfrac{a_1\omega_1^2}{\pi^2 q^2}h^2 + \ldots}{1 - \dfrac{h}{q} + \dfrac{1}{12}\dfrac{h^2}{q^2} + \dfrac{e_1\omega_1^2}{\pi^2 q^2}h^2 + \ldots}$$

$$\times\left(1 + \frac{3}{2}\frac{h}{q} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{q^2} + \ldots\right)\frac{1}{1 + \dfrac{h}{q}},$$

les termes non écrits étant du troisième ordre en h, au moins, et a_1 désignant la constante

$$a_1 = \wp\left(\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \omega_3\right).$$

Comme on a, d'autre part,

$$e^{i\Omega(Z)} = 1 - ih\Omega'(q) + \frac{h^2}{2}\left[i\Omega''(q) - \Omega'^2(q)\right] + \ldots,$$

on en conclut, en définitive,

$$e^{i\Omega(Z)}\frac{df}{dZ} = -\frac{2A\pi^2 q^2}{\omega_1^2 h^3}\left\{1 - \left(i\Omega'(q) + \frac{1}{2q}\right)h + \left[\frac{a_1 - e_1}{\pi^2 q^2}\omega_1^2 + \frac{i}{2q}\Omega'(q) - \frac{i\Omega''(q) - \Omega'^2(q)}{2}\right]h^2 + \ldots\right\}.$$

Le point $Z = q$ est donc un pôle triple avec un résidu égal à

$$r_1 = -\frac{2A\pi^2 q^2}{\omega_1^2}\left[\frac{a_1 - e_1}{\pi^2 q^2}\omega_1^2 + \frac{i}{2q}\Omega(q) - \frac{i\Omega''(q) - \Omega'^2(q)}{2}\right].$$

Un calcul du même genre pour le point $Z = -q$ nous prouvera que ce point est un pôle simple, avec un résidu égal à

$$r_2 = -2A(e_1 - a_1).$$

On peut maintenant écrire

$$4iR_x = 2i\pi(r_1 + r_2),$$

c'est-à-dire

$$R_x = -\frac{A\pi^2 q^2}{\omega_1^2}\left[\frac{i}{2q}\Omega'(q) - \frac{i\Omega''(q) - \Omega'^2(q)}{2}\right].$$

Cette expression, en apparence, est embarrassée d'imaginaires. Cette simple observation permet de prévoir qu'on a nécessairement

$$\frac{1}{q}\Omega'(q) + \Omega''(q) = 0.$$

C'est ce qu'il est, en fait, aisé de déduire de l'expression générale de $\Omega(Z)$. En dérivant deux fois la formule (22), on trouve en effet

$$\Omega'(Z) = \frac{\omega_1}{\pi^2 Z}\int_0^{\pi}\Phi(s)\left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s\right) + p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - 2p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right)\right]ds,$$

$$\begin{aligned}\Omega''(Z) = & -\frac{\omega_1^2}{\pi^3 Z^2}\int_0^{\pi}\Phi(s)\left[p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s\right) + p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - 2p\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right)\right]ds \\ & - \frac{\omega_1^3}{i\pi^3 Z^2}\int_0^{\pi}\Phi(s)\left[p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s\right) + p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - 2p'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z\right)\right]ds.\end{aligned}$$

De là nous tirons

$$\frac{1}{q}\Omega'(q) + \Omega''(q)$$
$$= \frac{\omega_1^3}{i\pi^4 q^2}\int_0^{\pi}\Phi(s)\left[p'\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s\right)\right.$$
$$\left. + p'\left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi}s\right) - 2p'(\omega_3)\right] ds,$$

mais $p'(\omega_3) = 0$ et $p'\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{\pi}s\right) = -p'\left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{\pi}s\right)$; on a donc bien l'égalité prévue et il reste simplement la formule suivante pour R_x

$$R_x = -\frac{A\pi^3 q^2}{2\omega_1^2}\Omega'^2(q).$$

Du reste, on peut mettre $\Omega'(q)$ sous la forme

$$\Omega'(q) = \frac{\omega_1^2}{\pi^3 q}\int_0^{\pi}\Phi(s)\left[p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \omega_3\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \omega_3\right)\right] ds.$$
$$= -\frac{2\omega_1^2(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)}{\pi^3 q}\int_0^{\pi}\frac{\Phi(s)\,ds}{p\frac{\omega_1}{\pi}s - e_3}.$$

Application. — Etudions le cas où l'obstacle est une lame rectiligne normale au courant. La fonction $\Phi(s)$ devra alors prendre les valeurs $\mp\frac{\pi}{2}$ sur les parois ϖ_1 et ϖ_2 respectivement, et la condition de régularité donnera $s_0 = \frac{\pi}{2}$. La fonction $\Omega(Z)$ qui correspond à ce cas est donc

$$(3)\qquad \Omega(Z) = i\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{2}\right)} + \frac{\eta_1\omega_1}{\pi}\log Z + \frac{\pi}{2}.$$

De là nous tirons

$$\Omega'(q) = \frac{\omega_1}{\pi q}\left[\zeta\left(\omega_3 - \frac{\omega_1}{2}\right) - \zeta\left(\omega_3 + \frac{\omega_1}{2}\right) - \eta_1\right]$$
$$= \frac{\omega_1}{\pi q}\left(\eta_1 - 2\zeta_3\frac{\omega_1}{2}\right);$$

d'où

$$R_x = \frac{A\pi}{2}\left[\eta_1 - 2\zeta_3\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right]^2.$$

Mais il faut rapporter cette résistance, qui est du reste la résistance totale elle-même, à l'unité de longueur de la lame; c'est-

à-dire qu'il faut calculer la longueur de celle-ci. Or, d'après la formule (21) qui définit df, on a, puisque la paroi correspond à $Z = e^{is}$ $(0 < s < \pi)$,

$$l = -\frac{A\omega_1}{\pi}(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2$$
$$\times \int_0^\pi \frac{e^{-T'}\left|p\left(\frac{\omega_1}{2}\right) - p\left(\frac{\omega_1}{\pi}s\right)\right| p'\left(\frac{\omega_1}{\pi}s\right)}{\left(p\frac{\omega_1}{2} - e_3\right)\left(p\frac{\omega_1}{\pi}s - e_2\right)\left(p\frac{\omega_1}{\pi}s - e_3\right)^2}\,ds.$$

dans cette formule, T′ désigne le coefficient de i dans $\Omega(e^{is})$. On trouve sans difficulté, d'après (23),

$$T' = \log\left|\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{2}\right)}\right| - \frac{\eta_1\omega_1}{\pi}s;$$

d'où, après quelques transformations élémentaires,

$$l = -\frac{A\omega_1}{\pi}\,\frac{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2}{p\frac{\omega_1}{2} - e_3}$$
$$\times \int_0^\pi \frac{e^{\frac{\eta_1\omega_1}{\pi}s}\,\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}s - \frac{\omega_1}{2}\right)\left|p\frac{\omega_1}{2} - p\frac{\omega_1}{\pi}s\right| p'\frac{\omega_1}{\pi}s}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{\pi}s + \frac{\omega_1}{2}\right)\left(p\frac{\omega_1}{\pi}s - e_2\right)\left(p\frac{\omega_1}{\pi}s - e_3\right)}\,ds.$$

Posons $\frac{\omega_1}{\pi}s = u$, et observons que l'on a

$$p\frac{\omega_1}{2} - e_3 = e_1 - e_3 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}$$
$$= \sqrt{e_1 - e_3}\left(\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}\right),$$

$$pu - e_2 = \frac{\sigma_2^2 u}{\sigma^2 u}, \qquad pu - e_3 = \frac{\sigma_3^2 u}{\sigma^2 u}, \qquad p'u = -2\frac{\sigma_1 u\,\sigma_2 u\,\sigma_3 u}{\sigma^4 u},$$

$$p\frac{\omega_1}{2} - pu = -\frac{\sigma\left(u + \frac{\omega_1}{2}\right)\sigma\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma^2 u\,\sigma^2\frac{\omega_1}{2}};$$

l'intégrale à calculer prend la forme

$$(31)\quad l = \frac{2A\sqrt{e_1 - e_3}(e_2 - e_3)^2}{\left(\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}\right)\sigma^2\frac{\omega_1}{2}} \int_0^{\omega_1} e^{\eta_1 u}\frac{\sigma u\,\sigma_1 u\,\sigma^2\left(u - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma_2 u\,\sigma_3^2 u}\,du.$$

Désignons par $Q(u)$ la fonction sous le signe intégral. Les for-

mules d'addition montrent que

$$Q(u+2\omega_1) = Q(u),$$
$$Q(u+2\omega_3) = Q(u).$$

Nous pourrons donc décomposer en éléments simples la fonction $Q(u)$, en utilisant comme fonction élémentaire la fonction $\xi_{10}u = \frac{\sigma_1 u}{\sigma u}$, qui jouit des mêmes propriétés que $Q(u)$ relativement à la périodicité, avec les mêmes multiplicateurs. Les points singuliers de $Q(u)$ sont : le pôle simple $u = \omega_2$ et le pôle triple $u = \omega_3$. Le résidu pour $u = \omega_2$ est

$$B_0 = e^{-\eta_2\omega_2}\frac{\sigma\omega_2\,\sigma_1\omega_2\,\sigma^2\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right)}{\sigma'_2\omega_2\,\sigma_3^3\omega_2}.$$

Mais on a

$$\sigma'_2\omega_2 = -\frac{e^{-\eta_2\omega_2}}{\sigma\omega_2}, \qquad \sigma\left(\omega_2 - \frac{\omega_1}{2}\right) = -e^{\frac{\eta_1\omega_2}{2}}\sigma\omega_2\,\sigma_3\frac{\omega_1}{2},$$

$$\frac{\sigma^2\omega_2\,\sigma_1\omega_2}{\sigma_3^3\omega_2} = \frac{i\sqrt{e_1-e_2}}{(e_2-e_3)\sqrt{e_2-e_3}}$$

($\sqrt{e_2-e_3}$ est négatif). De là il vient

$$B_0 = -e^{-\eta_3\omega_3}\frac{i\sqrt{e_1-e_2}}{(e_2-e_3)\sqrt{e_2-e_3}}\sigma^2\omega_3\,\sigma_3^2\frac{\omega_1}{2}.$$

Maintenant, les formules (T. et M., XIII, 1)

$$e^{-\eta_1\omega_3} = -\frac{\sigma\omega_1\,\sigma\omega_3}{\sigma\omega_2}\sqrt{e_1-e_3}, \qquad e^{-\eta_3\omega_2} = -\frac{\sigma\omega_2\,\sigma\omega_3}{\sigma\omega_1}\sqrt{e_2-e_3}$$

donnent par multiplication

$$e^{\eta_3\omega_3} = \sigma^2\omega_3\sqrt{e_1-e_3}\sqrt{e_2-e_3};$$

d'où

$$B_0 = -\frac{i\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}(e_2-e_3)^2}\sigma_3^2\frac{\omega_1}{2}.$$

Étudions maintenant $Q(u)$ au voisinage de $u = \omega_3$.

Posons $u = \omega_3 + h$; on sait que

$$\sigma(\omega_3+h) = e^{\eta_3 h}\sigma\omega_3\,\sigma_3 h, \qquad \sigma_1(\omega_3+h) = e^{\eta_3 h}\sigma_1\omega_3\,\sigma_2 h,$$
$$\sigma_2(\omega_3+h) = e^{\eta_3 h}\sigma_2\omega_3\,\sigma_1 h,$$
$$\sigma_3(\omega_3+h) = -e^{\eta_3 h}\frac{\sigma_1\omega_3\,\sigma_2\omega_3}{\sigma\omega_3}\sigma h;$$

d'où, en remarquant que $\frac{\sigma_1^2 \omega_3 \, \sigma_2^2 \omega_3}{\sigma^6 \omega_3} = -(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2$,

$$Q(\omega_3 + h) = \frac{-i}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2} e^{\eta_1 h} \frac{\sigma_2 h \, \sigma_3 h \, \sigma_3^2\left(\frac{\omega_1}{2} - h\right)}{\sigma_1 h \, \sigma^3 h}.$$

De là on tire, pour $Q(\omega_3 + h)$, un développement de la forme

$$Q(\omega_3 + h) = \frac{A_1}{h} + \frac{A_2}{h^2} + \frac{A_3}{h^3} + \text{série entière en } h,$$

en posant

$$A_3 = -i \frac{\sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2}}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2},$$

$$A_2 = \frac{i}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2}\left(2\sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3' \frac{\omega_1}{2} - \eta_1 \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2}\right),$$

$$A_1 = \frac{-i}{(e_1 - e_3)(e_2 - e_3)^2}\left[\left(e_1 - \frac{\eta_1}{2}\right)^2 \sigma_3^2 \frac{\omega_1}{2} - 2\eta_1 \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3' \frac{\omega_1}{2} + \sigma_3'^2 \frac{\omega_1}{2} + \sigma_3 \frac{\omega_1}{2} \sigma_3'' \frac{\omega_1}{2}\right].$$

On met tout de suite A_3 sous la forme

$$A_3 = -i \frac{\sqrt{e_1 - e_2} + \sqrt{e_1 - e_3}}{\sqrt{e_1 - e_2}\,(e_2 - e_3)^2} \sigma^2 \frac{\omega_1}{2}.$$

Puis l'égalité $\frac{\sigma_3' \frac{\omega_1}{2}}{\sigma_3 \frac{\omega_1}{2}} = \zeta_3 \frac{\omega_1}{2}$ permet d'écrire

$$A_2 = 2A_3\left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2}\right).$$

La relation

$$\frac{\sigma_3 u \, \sigma_3'' u - \sigma_3'^2 u}{\sigma_3^2 u} = -p(u + \omega_3)$$

donne, après réductions,

$$\sigma_3'' \frac{\omega_1}{2} = \sigma_3 \frac{\omega_1}{2}\left[\zeta_3^2 \frac{\omega_1}{2} - e_1 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}\right];$$

d'où encore

$$A_1 = A_3\left[2\left(\zeta_3 \frac{\omega_1}{2} - \frac{\eta_1}{2}\right)^2 + \sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_1 - e_3}\right].$$

Ceci posé, si nous revenons à notre fonction $Q(u)$ et si nous

formons la différence,

$$Q(u) - B_0\zeta_{10}(u-\omega_2)$$
$$- A_1\zeta_{10}(u-\omega_3) - A_2\zeta'_{10}(u-\omega_3) - \frac{A_3}{2}\zeta''_{10}(u-\omega_3),$$

nous constaterons immédiatement que cette différence constitue une fonction de seconde espèce aux mêmes multiplicateurs que $Q(u)$, mais dépourvue de pôles; cette différence est donc identiquement nulle, et l'intégrale de $Q(u)$ se ramène à celle de

$$Q(u) = B_0\zeta_{10}(u-\omega_2) + A_1\zeta_{10}(u-\omega_3)$$
$$+ A_2\zeta'_{10}(u-\omega_3) + \frac{A_3}{2}\zeta''_{10}(u-\omega_3).$$

Il nous suffira donc de connaître les quatre quantités suivantes :

$$U = \int_0^{\omega_1}\zeta_{10}(u-\omega_2)\,du, \qquad V = \int_0^{\omega_1}\zeta_{10}(u-\omega_3)\,du,$$

$$W = \int_0^{\omega_1}\zeta'_{10}(u-\omega_3)\,du, \qquad X = \int_0^{\omega_1}\zeta''_{10}(u-\omega_3)\,du.$$

Les deux dernières sont immédiates : on a

$$W = \zeta_{10}(\omega_1-\omega_3) - \zeta_{10}(-\omega_3) = \zeta_{10}\omega_2 - \zeta_{10}\omega_3$$
$$= \sqrt{e_2-e_1} - \sqrt{e_3-e_1} = i(\sqrt{e_1-e_2} - \sqrt{e_1-e_3}),$$

puis

$$X = \zeta'_{10}(\omega_1-\omega_3) - \zeta'_{10}(-\omega_3).$$

On sait que $\zeta'_{10}u = -\zeta_{20}u\,\zeta_{30}u$, donc

$$X = \zeta_{20}\omega_2\,\zeta_{30}\omega_2 - \zeta_{20}\omega_3\,\zeta_{30}\omega_3 = 0,$$

car $\zeta_{20}\omega_3 = \zeta_{30}\omega_2 = 0$. Puis on a (T. et M., LXI, 3)

$$\zeta_{10}(u-\omega_2) = -\sqrt{e_2-e_1}\,\zeta_{32}u = -i\sqrt{e_1-e_2}\,\zeta_{32}u,$$
$$\zeta'_{12}u = -(e_1-e_2)\,\zeta_{02}u\,\zeta_{32}u;$$

donc

$$U = \frac{i}{\sqrt{e_1-e_2}}\int_0^{\omega_1}\frac{\zeta'_{12}u}{\zeta_{02}u}\,du.$$

Or

$$\zeta_{02}u = \frac{\sqrt{1-\zeta_{12}^2u}}{\sqrt{e_1-e_2}},$$

les déterminations des radicaux étant positives dans l'intervalle

d'intégration; il vient par suite

$$U = i\int_0^{\omega_1} \frac{-\xi_{12}'u}{\sqrt{1-\xi_{12}^2 u}}\,du = -i\frac{\pi}{2},$$

puisque $\xi_{12}u$ varie de 1 à 0 en restant réel. Par un procédé analogue, on trouvera

$$V = i\frac{\pi}{2}.$$

Transportons dans l'intégrale de $Q(u)$, il vient

$$\int_0^{\omega_1} Q(u)\,du$$

$$= -\frac{i\pi}{2}B_0 - iA_3\left\{\pi\left[\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{2}-\frac{\eta_1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}}{2}\right]\right.$$
$$\left. - 2\left(\sqrt{e_1-e_2}-\sqrt{e_1-e_3}\right)\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{2}-\frac{\eta_1}{2}\right)\right\}.$$

D'après cela, on trouve finalement

$$l = 2A\left[\pi\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{2}-\frac{\eta_1}{2}\right)^2 - 2\left(\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_1-e_2}\right)\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{2}-\frac{\eta_1}{2}\right)\right].$$

Et par suite la résistance de la lame, par unité de longueur de celle-ci, est donnée par la formule

$$(25)\qquad \frac{R_x}{l} = \frac{\pi\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{2}-\frac{\eta_1}{2}\right)}{\pi\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{2}-\frac{\eta_1}{2}\right) - 2\left(\sqrt{e_1-e_3}-\sqrt{e_1-e_2}\right)}.$$

De là nous allons déduire ce résultat, extrêmement remarquable, que la valeur de $\frac{R_x}{l}$ est la même que si le fluide était indéfini dans toutes les directions, c'est-à-dire *la même que si la paroi μ n'existait pas*.

Pour démontrer ce théorème, passons des fonctions employées précédemment aux fonctions ϑ de Jacobi; on sait que (T. et M., XXXIII, 8)

$$\zeta_1 u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} = \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)},\qquad \zeta_1\frac{\omega_1}{2}-\frac{\eta_1}{2} = \frac{1}{2\omega_1}\frac{\vartheta_1'\left(\frac{1}{4}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{1}{4}\right)};$$

puis

$$\sqrt{e_1-e_3} = \frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_3^2(0),\qquad \sqrt{e_1-e_2} = \frac{\pi}{2\omega_1}\vartheta_4^2(0),$$

ce qui permet d'écrire

$$(26)\qquad \frac{R_x}{l} = \frac{\dfrac{\mathfrak{S}'_1\left(\frac{1}{4}\middle|\tau\right)}{\mathfrak{S}_1\left(\frac{1}{4}\middle|\tau\right)}}{\dfrac{\mathfrak{S}'_4\left(\frac{1}{4}\middle|\tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4}\middle|\tau\right)} - \pi\left[\mathfrak{S}_3^2(0|\tau) - \mathfrak{S}_4^2(0|\tau)\right]}$$

en mettant en évidence le module $\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}$ des fonctions elliptiques introduites jusqu'ici.

Effectuons maintenant une transformation de Landen, ce qui revient à changer ω_1 en $\frac{\omega_1}{2}$ sans changer ω_3. Posons alors $Q = q^2$, nous aurons (T. et M., XXXVI, 2)

$$\mathfrak{S}_3^2(0|\tau) - \mathfrak{S}_4^2(0|\tau) = q_0^2(q_2^4 - q_3^4)$$

et (T. et M., XLVII, 2)

$$q_0^2(q_2^4 - q_3^4) = 8Q^{\frac{1}{2}}Q_0^2Q_1^4,$$

les grandes lettres ayant les mêmes significations que les petites, mais les constructions correspondantes étant faites avec le module 2τ au lieu de τ. Une combinaison simple des formules (T. et M., XLVII, 3) nous donne

$$\mathfrak{S}_4^2(v|\tau) = \mathfrak{S}_3(0|2\tau)\mathfrak{S}_3(2v|2\tau) - \mathfrak{S}_2(0|2\tau)\mathfrak{S}_2(2v|2\tau);$$

d'où nous tirons

$$\frac{\mathfrak{S}_4^2\left(\frac{1}{4}\middle|\tau\right)}{\mathfrak{S}_1^2\left(\frac{1}{4}\middle|\tau\right)} = \frac{\mathfrak{S}_3(0|2\tau)\mathfrak{S}_3\left(\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) - \mathfrak{S}_2(0|2\tau)\mathfrak{S}_2\left(\frac{1}{2}\middle|2\tau\right)}{\mathfrak{S}_2(0|2\tau)\mathfrak{S}_3\left(\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) - \mathfrak{S}_3(0|2\tau)\mathfrak{S}_2\left(\frac{1}{2}\middle|2\tau\right)}.$$

Mais on a (T. et M., XXXV, 2, et XXXVI, 2)

$$\mathfrak{S}'_2\left(\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) = -\mathfrak{S}'_1(0|2\tau) = -2\pi Q_0^3 Q^{\frac{1}{4}},$$

$$\mathfrak{S}'_3\left(\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) = 0;$$

puis (T. et M., XXXIV, 1, 4)

$$\mathfrak{S}_2\left(\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) = 0,$$

$$\mathfrak{S}_3\left(\frac{1}{2}\middle|2\tau\right) = \mathfrak{S}_4(0|2\tau) = Q_0Q_3^2.$$

Enfin

$$\mathfrak{S}_2(0|2\tau) = 2Q_0Q_1^2Q^{\frac{1}{4}},$$
$$\mathfrak{S}_3(0|2\tau) = Q_0Q_3^2.$$

Donc, en transportant,

$$\frac{\mathfrak{S}_1\left(\frac{1}{4}\middle|\tau\right)}{\mathfrak{S}_4\left(\frac{1}{4}\middle|\tau\right)} = 4\pi Q^{\frac{1}{2}}\frac{Q_0^2Q_1^2}{Q_2^2Q_3^2} = 4\pi Q^{\frac{1}{2}}Q_0^4Q_1^4,$$

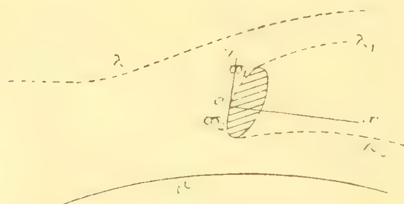
car $Q_1Q_2Q_3 = 1$; revenant à (26), nous concluons

$$\frac{R_d}{l} = \frac{\pi}{4+\pi}.$$

C'est la même valeur que pour le fluide indéfini : d'où le théorème annoncé.

Bien entendu, ce théorème ne subsiste pas pour une inclinaison quelconque de la lame, supposée oblique à la paroi solide limitant le fluide. Nous renverrons à notre Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 1918) pour le détail et la discussion des calculs concernant le cas général. Si l'inclinaison est quelconque, la

Fig. 51.



résistance directe peut être soit supérieure, soit inférieure à sa valeur limite $\frac{\pi\cos^2\delta}{4+\pi\cos\delta}$ qui convient au fluide indéfini. Nous laisserons également au lecteur le soin de traiter le cas (qui ne diffère du précédent que par des détails presque insignifiants dans les calculs) où le fluide limité par la paroi solide φ d'un côté, et limité également de l'autre côté par une ligne de courant λ le long de laquelle il glisse contre une région de fluide au repos, selon le schéma indiqué par la figure 51.

CHAPITRE IX.

LES SOLUTIONS MULTIPLES.

Les théories exposées dans les précédents Chapitres fournissent, en se plaçant dans l'hypothèse des fluides parfaits, une explication des phénomènes de résistance des fluides, dans la seule voie possible dès qu'on reste dans le domaine de l'Hydrodynamique rationnelle. Cette manière d'aborder la réalité physique donne des résultats suffisamment voisins des résultats expérimentaux. En fait, si l'on observe entre les résistances théoriques et expérimentales une différence, celle-ci se trouve être peu notable, et la différence (la résistance expérimentale est légèrement supérieure à la résistance théorique) s'explique par la présence inévitable de mouvements tourbillonnaires à l'arrière du solide à étudier.

Toutefois, il se présente une complication imprévue, dont nous devons dire un mot dans ce dernier Chapitre. L'introduction (inévitable) des lignes de glissement dans le fluide permet d'échapper aux paradoxes tels que celui de d'Alembert, et d'assurer dans le fluide des pressions partout positives. Les précédents Chapitres ont indiqué la formation de solutions échappant à toutes difficultés.

Il était naturel de penser qu'une solution de cette nature pour un solide donné, placé dans des conditions données, serait unique. Or il n'en est rien, et l'on peut s'assurer que, pour certaines configurations, même très simples, il existe une infinité de solutions acceptables. C'est ce que je me propose de mettre ici en évidence sur un exemple particulier, caractéristique et très simple (*cf.* notre Mémoire des *Annales de l'École Normale*, 1914).

Considérons, dans un courant indéfini (de vitesse 1 à l'infini, parallèle à Ox), un obstacle constitué par deux lames rectilignes AB, AC, formant un creux vers le courant.

Le procédé classique permet de former une première solution acceptable, le point mort à l'avant se plaçant en O, par exemple sur AB, et le courant suivant alors les deux chemins OAC et OB, de part et d'autre, pour former ensuite les deux lignes de glissement λ_1 et λ_2. Nous avons vu que cette solution échappait à toutes difficultés concernant les vitesses ou les pressions, ou encore concernant la configuration exacte du plan z : on peut placer le point mort O convenablement, sur une lame ou sur l'autre, de façon à donner aux deux lames une situation géométrique donnée.

À côté de cette solution, nous allons en former d'autres, d'un caractère différent, de la façon suivante : supposons que, le point

Fig. 52.

mort étant en O, par exemple sur AB, le courant vienne envelopper l'obstacle de manière à laisser, au voisinage du sommet A, une plage de fluide en repos, séparée par une ligne de glissement

Fig. 53.

ment λ, ainsi que l'indique la figure. Le long de λ, il résulte des principes généraux ci-dessus que la vitesse devra être constante ($= V_1$) et plus petite que 1 si nous faisons, comme d'habitude, égale à 1 la vitesse à l'infini.

Traitons le problème ainsi posé : à la région en mouvement correspondra, en supposant f nul au point O, l'aire intérieure à un rectangle, en posant

$$f = t^2,$$

$$t = \frac{1}{2}\,\frac{p(Z_1 \mid \omega'_1, \omega'_3) - p'(\gamma \mid \omega'_1, \omega'_3)}{p(Z_1 \mid \omega_1, \omega'_3) - p(\gamma \mid \omega_1, \omega_3)} = \frac{S_1}{i};$$

la fonction p est supposée construite avec les demi-périodes ω_1 et ω_3, et nous posons

$$q = e^{\frac{\pi\omega}{\omega'}};$$

Fig. 14.



γ est un argument que l'on peut supposer compris entre 0 et ω_1; ensuite, la transformation

$$Z_1 = \frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2} + \omega'_1$$

nous ramène à la demi-couronne dans le plan Z. Le point qui correspond au point à l'infini du plan z est

$$j = q\,e^{\frac{i\pi\gamma}{2\omega}},$$

le point e^{is_0} correspond à la séparation entre ϖ_1 et ϖ_2, c'est-à-dire à $f = 0$. Enfin on a, comme toujours,

$$\frac{df}{dz} = e^{-i\Omega}, \qquad \Omega = \Theta + iT, \qquad V = e^{T}.$$

Ceci posé, la fonction $\Omega(Z)$, régulière dans la demi-couronne, devra, si elle existe, satisfaire aux conditions suivantes :

Pour $Z = e^{is}$; $0 < s < s_0$:

$$\Theta = -\alpha - \delta.$$

Pour $Z = e^{is}$; $s_0 < s < \pi$:

$$\Theta = \pi - \alpha - \delta;$$

Pour $Z = q\,e^{is}$; $0 < s < \pi$:

$$\Theta = \alpha - \delta,$$

en désignant par $-\delta \pm \alpha$ les angles que font les directions AB et AC avec Ox (par hypothèse, $\pi < 2\alpha < 2\pi$).

La partie imaginaire T devra être nulle pour $q < Z < 1$, et égale à $\log V_1$ pour $-1 < Z < -q$. Nous ferons

$$a = -\log V_1 \qquad (a > 0).$$

Si l'on pose

$$\omega_3 = i\omega_1',$$

$$\omega_1' = \frac{\omega_3}{i}, \qquad q = e^{-\frac{\pi\omega}{i\omega_1}},$$

l'existence de la fonction $\Omega(Z)$ exigera l'égalité

$$(27) \qquad \pi - 2\alpha - s_0 + a\,\frac{\omega_3}{i\omega_1} = 0,$$

et l'on aura

$$\Omega(Z) = i\log\frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_1 + \omega_3\right)}{\sigma\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z + \frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \omega_1 + \omega_3\right)}$$

$$+ \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\log Z - \pi - \alpha - \delta.$$

La détermination du logarithme du quotient des fonctions σ est celle qui est égale à $i\pi$ pour $Z = 1$, et que l'on doit suivre par continuité.

Pour remonter au plan z, on aura

$$dz = e^{i\Omega(Z)}\frac{df}{dZ}\,dZ.$$

Il y aura donc lieu de remplacer, dans la valeur de f, les demi-périodes ω_1', ω_3' au moyen de ω_1, ω_3, ce qui, au moyen des formules d'homogénéité, conduit à l'égalité

$$dz = -\frac{2\omega_1}{\pi}e^{i\Omega(Z)}\left[\frac{S_1}{4} - \frac{i}{2}\,\frac{\wp'\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - \wp'\left(\frac{\gamma}{i}\right)}{\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - \wp\left(\frac{\gamma}{i}\right)}\right]$$

$$\times\left[\wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right) - \wp\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log Z - \frac{\gamma}{2i} - \omega_3\right)\right]\frac{dZ}{Z},$$

la fonction $\wp$ écrite ici correspondant aux périodes non accentuées.

Il est facile maintenant de s'assurer si la solution est acceptable. Nous vérifierons : 1° que la vitesse dans le fluide ne devient nulle part supérieure à 1, ce qui est assuré si T ne devient jamais positif sur les frontières du domaine annulaire ; 2° que toutes les lignes de glissement λ, λ_1, λ_2 sont bien, la première convexe vers le point A, les deux autres convexes vers le fluide en mouvement, ce qui assure que la configuration soit bien celle de la figure 53, sans qu'il y ait incompatibilité, notamment, entre la présence de la ligne λ et l'existence de la paroi solide DAE.

Pour ce qui concerne λ_1 et λ_2, les calculs, identiques à ceux de

la page 54, fournissent l'inégalité

$$(28)\qquad -2\omega_1\zeta_3\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a < 0.$$

Relativement à λ, on trouve le long de cette ligne que la valeur de Θ est

$$\Theta = i\log\frac{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} - \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)\log\rho + \pi + \alpha - \delta,$$

ρ variant de q à 1 lorsque le point z décrit λ dans le sens ED. Si nous écrivons que Θ décroît constamment quand ρ croît, nous serons assurés que λ tourne sa convexité vers le point A. Or $\frac{d\Theta}{d\rho}$ a le signe de

$$U_1(\rho) = \omega_1\left[\zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right) - \zeta_1\left(\frac{\omega_1}{i\pi}\log\rho - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)\right] - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a,$$

expression qui varie elle-même toujours dans le même sens, entre les valeurs limites

$$U_1(q) = -2\omega_1\zeta_2\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a$$

et

$$U_1(1) = -2\omega_1\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a.$$

Il suffira donc que ces deux valeurs soient négatives, ce qui est entraîné par l'unique inégalité

$$(29)\qquad -2\omega_1\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a < 0.$$

Voyons maintenant ce qui concerne les vitesses ; il n'y a évidemment à s'occuper que des frontières demi-circulaires. Pour $Z = e^{is}$, le coefficient de i dans $\Omega(Z)$ est

$$T(s) = \log\left|\frac{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)}{\sigma\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)}\right| + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}\right)s.$$

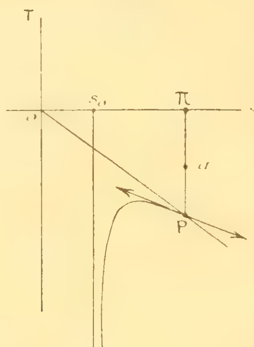
Cette fonction de s est discontinue pour $s = s_0$ dans l'intervalle $0, \pi$, et l'on a

$$\frac{dT}{ds} = \frac{\omega_1}{\pi}\left[\zeta\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) - \zeta\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0)\right] - \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{a}{\pi},$$

$$\frac{d^2T}{ds^2} = \frac{\omega_1^2}{\pi^2}\left[p\frac{\omega_1}{\pi}(s - s_0) - p\frac{\omega_1}{\pi}(s + s_0)\right];$$

cette dérivée seconde restant visiblement négative, $\frac{dT}{ds}$ décroît et ses valeurs limites pour $s = 0$ ou π sont négatives en vertu des conditions (28) et (29) déjà supposées. Donc T décroît dans l'intervalle O, s_0, et il y sera toujours négatif puisqu'il part de zéro. Dans l'intervalle s_0, π, T part de $-\infty$, passe par un maximum et revient à la valeur $-a$ pour $s = \pi$; je dis que ce maximum est négatif. En effet, si nous supposons tracée la courbe du plan sT

Fig. 55.



qui représente les variations de $T(s)$ dans l'intervalle s_0, π, cette courbe tourne sa concavité vers le bas et, si P est le point de cette courbe qui correspond à $s = \pi$, ce point a pour ordonnée $-a$, avec une tangente dont le coefficient angulaire est

$$m = -\frac{2\omega_1}{\pi}\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi^2}s_0 - \frac{a}{\pi}.$$

Or $-\frac{a}{\pi}$ est le coefficient angulaire de la droite OP, et l'on a

$$m + \frac{a}{\pi} = -\frac{2\omega_1}{\pi}\left(\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 - \frac{\eta_1}{\pi}s_0\right).$$

Mais une formule connue (T. et M., XXXIII, 8)

$$\zeta_1 u - \frac{\eta_1 u}{\omega_1} = \frac{1}{2\omega_1}\,\frac{\mathfrak{I}_2'\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}{\mathfrak{I}_2\left(\frac{u}{2\omega_1}\right)}$$

donne

$$m + \frac{a}{\pi} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{\mathfrak{I}_2'\left(\frac{s_0}{2\pi}\right)}{\mathfrak{I}_2\left(\frac{s_0}{2\pi}\right)};$$

$\frac{s_0}{2\pi}$ étant un nombre compris entre o et $\frac{1}{2}$, $\mathfrak{S}_2\left(\frac{s_0}{2\pi}\right)$ est positif, et $\mathfrak{S}'_2\left(\frac{s_0}{2\pi}\right)$ est négatif (TANNERY et MOLK, t. II, p. 36). Donc

$$m > -\frac{a}{\pi}.$$

Autrement dit, la courbe en question ne peut jamais atteindre l'axe des s, et par conséquent T reste constamment négatif.

Dans le cas particulier où l'on a

$$-2\omega_1\zeta_1\frac{\omega_1}{\pi}s_0 + \frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a = 0,$$

le maximum en question est atteint pour $s = \pi$, et est par suite égal à $-a$: dans ce cas, il est évident sans autre raisonnement que T reste négatif. J'avais donné ce résultat dans le cas de l'égalité (29), dans mon Mémoire des *Annales;* M. René Thiry, dans une Note des *Comptes rendus* (mars 1920), l'a généralisé pour le cas où l'on a seulement l'inégalité (29).

Enfin, sur la paroi ϖ, c'est-à-dire pour

$$Z = qe^{is} \qquad (0 < s < \pi),$$

on constate sans peine qu'en vertu des conditions déjà trouvées, T varie de $-a$ à zéro, en variant toujours dans le même sens.

Les conditions (28) et (29) sont, du reste, surabondantes ; en vertu de la relation

$$\zeta_1 u - \zeta_3 u = \frac{1}{2}\,\frac{(e_1 - e_3)\,p'u}{(pu - e_1)(pu - e_3)} \qquad (< 0 \text{ pour } 0 < u < \omega_1),$$

il est manifeste qu'on peut effacer la condition (28) et ne conserver que (29).

Il faut maintenant orienter convenablement l'obstacle dans le courant, c'est-à-dire écrire, ce que nous avons négligé jusqu'ici, que la vitesse du courant à l'infini est horizontale. Le point à l'infini du plan z correspondant à

$$Z = j = qe^{\frac{i\pi\gamma}{2\omega'_3}} = qe^{\frac{\pi\gamma}{2\omega_1}},$$

on en conclut de suite la condition

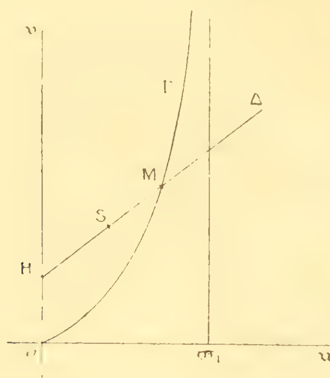
$$(30) \quad i\log\frac{\sigma\left(\omega_3 - \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 - \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi}s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi}s_0 - a\right)\left(-\frac{\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1}\right) + \pi - \alpha - \delta = 0.$$

En résumé, nous devons satisfaire aux conditions

$$a > 0, \qquad 0 < s_0 < \pi, \qquad 0 < \gamma < \frac{2\omega_3}{i},$$
$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi, \qquad 0 < \alpha \pm \delta < \pi.$$

et aux conditions (27), (29), (30). Et tout revient à s'assurer si les conditions précédentes sont compatibles, et avec quel degré d'arbitraire on peut y satisfaire. A cet effet, au lieu de nous donner les longueurs des lames AB et AC, nous nous donnerons les demi-périodes $\omega_1\,\omega_3$, et nous déduirons, au moyen des conditions impo-

Fig. 56.



sées, les quantités a, s_0, en supposant connu α; nous calculerons ensuite γ au moyen de δ par l'équation (30). Posons

$$\mathfrak{U} = \frac{\omega_1}{\pi} s_0, \qquad \mathfrak{V} = \frac{a}{2\omega_1},$$

nous remplacerons (27) et (29) par

$$\mathfrak{V} = \frac{i}{2\omega_3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\mathfrak{U} + 2\alpha - \pi\right),$$
$$\mathfrak{V} > -\zeta_1\mathfrak{U} + \frac{\eta_1}{\omega_1}\mathfrak{U}.$$

D'où la construction suivante, conséquence immédiate de ces équations : on tracera la courbe Γ ayant pour équation

$$\mathfrak{V} = -\zeta_1\mathfrak{U} + \frac{\eta_1}{\omega_1}\mathfrak{U},$$

dans l'intervalle $0 < u < \omega_1$; cette courbe a la forme indiquée par le dessin; sur ov, on prendra un point H d'ordonnée $\frac{i(2\alpha - \pi)}{2\omega_3}$ (positive d'après les hypothèses), et de ce point on mènera une

droite Δ de pente $\frac{i\pi}{2\omega_1\omega_3}$: on voit aisément que le point M de rencontre avec l'est unique. Les coordonnées d'un point quelconque S du segment HM fournissent les nombres $\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{V}$ répondant à la question, c'est-à-dire les nombres s_0 et a demandés.

Il reste ensuite à calculer γ ; pour cela, il est aisé de démontrer que l'expression

$$i \log \frac{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} + \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)}{\sigma\left(\omega_3 + \frac{\gamma}{2i} - \frac{\omega_1}{\pi} s_0\right)} + \left(\frac{2\eta_1\omega_1}{\pi} s_0 - a\right)\left(\frac{-\omega_3}{i\omega_1} + \frac{\gamma}{2\omega_1}\right)$$

décroit constamment de $2\alpha - \pi$ à $-\pi$ quand γ varie de o à $\frac{2\omega_3}{i}$; elle passe donc une fois et une seule par la valeur $-\pi - \alpha - \delta$, et par suite l'équation (30) admet une solution et une seule par rapport à γ dans l'intervalle voulu.

Le calcul de la longueur des deux lames AB et AC peut ensuite être effectué sans qu'aucune difficulté spéciale ultérieure puisse apparaître dans ce calcul : il s'agit, en effet, simplement d'intégrales définies, portant sur des fonctions essentiellement positives et finies dans des intervalles d'étendue finie.

La multiplicité des solutions acceptables pour un même obstacle est donc dès maintenant démontrée. En effet, construisons la solution qui correspond à un point S déterminé de la droite HM, et à des angles α et δ donnés ; calculons les longueurs des lames ; puis, pour l'obstacle ainsi obtenu, construisons la solution de première espèce dont nous avons vu l'existence, et pour laquelle le courant suit exactement le profil OB ou OAC sans éviter le sommet A. Nous avons ainsi deux solutions possibles, pour le même obstacle.

Il est du reste à peu près évident qu'il y en aura une infinité, puisque nous pouvons choisir le point S d'une infinité de manières ; mais il faut montrer que, pour chaque choix de S, on peut s'arranger pour obtenir *le même* obstacle avec des lames toujours de même longueur et de même orientation.

On trouvera dans mon Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 1914) divers détails de calcul dans le cas précis où les deux lames font avec Ox des angles donnés numériquement, égaux en valeur absolue à 113°36′ et 157°39′.

Dans le cas où l'inégalité (29) se transforme en égalité, ou bien encore dans le cas où l'on place le point S en M, on peut vérifier que la ligne de glissement λ arrive en D tangentiellement à AB avec un rayon de courbure infini.

Des diverses solutions, toutes acceptables pour un même solide, ainsi mises en évidence, laquelle est la meilleure du point de vue physique ? C'est là une question que je me contente de poser ici, et que seules des considérations de stabilité et de viscosité permettraient sans doute d'élucider complètement.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie
63120 Quai des Grands-Augustins, 55.

